Разбор

Задание 1. (25 баллов) Вася и Петя выиграли на олимпиаде N пакетов с мерчем одной очень известной IT компании. Пакеты нумеруются с 0 до $N - 1$. И в пакете с номером i ровно 2^i ручек. Вася и Петя хотят разделить пакеты таким образом, чтобы разница между суммарным количеством ручек у каждого из них была минимально возможной, при этом они не хотят перекладывать ручки из одного пакета в другой.

1) (5 баллов) Каким образом Вася и Петя должны поделить пакеты и какой минимальной разницы они могут достигнуть при $N = 6$?

2) (20 баллов) Каким образом Вася и Петя должны поделить пакеты и какой минимальной разницы они могут достигнуть при $N = 1024$?

Решение

Решим задачу в общем виде.

Заметим, что суммарное количество ручек во всех пакетах нечетно. Для доказательства этого факта можно воспользоваться формулой суммы геометрической прогрессии или же просто заметить, что только одно из слагаемых (количество ручек в пакете номер 0) нечетно. Из этого следует, что минимальная разность не может быть равна 0.

Покажем теперь, что разность 1 достижима. Сумма степеней двоек от 1 до 2^n по выше озвученной формуле суммы геометрической прогрессии равна $2^{n+1} - 1$. Тогда отдадим пакеты с номерами от 0 до $N - 2$ Васе, а пакет с номером $N - 1$ – Пете.

Критерии оценки

Ответ без пояснений оценивался в 0 баллов.

Решения, в которых не было показано, что разность 0 не может быть достигнута оценивались в 0 баллов.

Остальные решения оценивались из максимальных баллов за пункт в зависимости от строгости использованных утверждений.

Задание 2. (25 баллов) Современное искусство порой очень необычная штука. Так и в этот раз, посещая новую выставку, Саша встретил очень необычную картину. Она представляла собой табличку из 256 столбцов и 1024 строк, при этом в каждой клеточке таблицы находилось какое-то целое число. По пути домой Саша, конечно же, забыл какие именно числа были в каждой из клеток. Зато Саша помнил, что для каждого набора клеточек, образующего квадрат $2{\times}2$ клеточек выполнялось, что сумма чисел в этих клетках равнялась 32.
Больше современного искусства Саша любит только странные вопросы к олимпиадным задачам, поэтому он просит Вас вычислить сумму чисел, написанных в клетках, находящихся по периметру картины. То есть таких клеток, что располагаются в первом или последнем столбцах, или в первой или последней строчках.

Решение

Для решения задачи сначала покажем, что сумма чисел в прямоугольнике со сторонами $2n \times 2m$ равна $32nm$. Для этого достаточно показать, что такой прямоугольник разбивается на nm непересекающихся квадратов 2×2. Действительно, мы просто разбиваем каждую из сторон на n и m соответственно частей длины 2, и получившаяся сетка является подходящим разбиением.

Тогда ответов на задачу будет разность суммы в исходной таблице и в таблице без периметра. То есть из суммы чисел в таблице 256×1024 мы вычитаем сумму чисел в таблице 254×1022. Получаем $32(128 \times 512 - 127 \times 511) = 20448.$

Критерии оценки

Ответ без объяснений оценивался в 0 баллов.

Решения оценивались из 25 баллов в зависимости от строгости утверждений.

За арифметические ошибки снимался 1 балл в случае, если формула была написана корректно.

Задание 3. (25 баллов) Гриша увлекается рисованием. В данный момент он хочет изобразить пейзаж с двумя горами. Для простоты Гриша решил, что поверхность земли он изобразит в качестве прямой линии, а горы в виде двух равнобедренных треугольников, основанием лежащих на линии земли. Углы при основании гор равняются 45°.
С одной стороны, Гриша планирует сохранить аутентичность пейзажа, поэтому он хочет, чтобы общая протяженность поверхности гор равнялась X условных единиц.
С другой стороны, немного художественного вымысла не помешает, поэтому Гриша хочет минимизировать площадь гор на рисунке, чтобы сэкономить краску.
Помогите Грише найти минимальную площадь гор на рисунке, если общая протяженность поверхности гор равняется 1024.

Решение

Для начала заметим, что равнобедренные треугольники с углом при основании равным 45° являются прямоугольными. Пусть катеты треугольников равны a и b соответственно. Тогда из условия на общую протяженность поверхности гор получаем, что $2a + 2b = 1024$ или же $a + b = 512$.
Обозначим $a = 256 + x, b = 256 - x$, где $x \geq 0$

Тогда нам нужно минимизировать функцию $\frac{a^2+b^2}{2} \rightarrow min$.
$\frac{(256+x)^2+(256-x)^2}{2} \rightarrow min \Leftrightarrow (256 + x)^2 + (256 - x)^2 \rightarrow min \Leftrightarrow 2^{17} + 2x^2 \rightarrow min \Leftrightarrow 2x^2 \rightarrow min$
Последнее выражение минимально при $x = 0$. Так как переходы были равносильными, то и исходная функция при этом минимальна.

Таким образом минимальная площадь равна $\frac{256^2 + 256^2}{2} = 256^2 = 2^{16}$.

Критерии оценки

В задаче не подразумевалась возможность пересечения гор. Решения, которые рассматривают эти случаи оценивались в зависимости от их корректности.

Решения, не содержащие доказательства, что минимальная площадь достигается при равенстве сторон оценивались в 0 баллов.

Задание 4. (25 баллов) Саша недавно научился играть в нарды. Но правила игры показались ему слишком сложными, поэтому он решил их упростить.
Поскольку Саша не любит играть с кем-то, то в первую очередь он решил, что будет играть один и не будет ни с кем соревноваться. Затем Саша решил, что начинать из одной и той же позиции – это скучно, поэтому начал экспериментировать. Теперь он просто располагает фишки по каким-то лункам и начинает с такой конфигурации.
Более формально, поле для игры в нарды состоит из 24 лунок. У Саши есть 18 фишек, которые он изначально расставляет по лункам. В лунке может стоять любое количество фишек.
Теперь Саше стало интересно, сколько же существует вариантов стартовых позиций. Помогите ему ответить на этот вопрос.

Решение

Пусть у нас есть 41 шарик расположенные в линию, 23 из которых окрашены в черный цвет, а остальные в белый. Для удобства добавим к ним в начале и конце по одному черному шару.
Покажем для начала, как из такого объекта получить соответствующее ему размещение фишек по лункам.
У нас есть 24 черных шара. Пронумеруем их по порядку вхождения в линию, начиная с 0, и в лунку с номером n (лунки нумеруем с 1) поместим столько фишек, сколько белых шаров находится между шарами с номерами $n - 1$ и n. Так как белых шаров 18, то на поле окажется ровно 18 фишек.

Покажем, что две различных раскраски шаров дадут нам разные расположения фишек по лункам. Для этого рассмотрим первый шар в двух раскрасках, цвет которого различается. Пусть в первой раскраске он имеет белый цвет, а во второй – чёрный, который имеет номер k. Тогда очевидно, что количество фишек в лунке с номером k в первом и втором случае будет отличаться. Значит полученные образы такого преобразования различны для различных раскрасок.

Мы показали, что для каждого элемента множества всех раскрасок шаров существует образ в множестве расположений фишек по лункам и при этом они различны. Значит, мощность второго множества не меньше мощности первого множества.

Покажем теперь обратное. У нас есть какое-то размещение фишек по лункам и мы хотим показать, как мы преобразуем его в раскраску шаров. Для этого будем действовать по обратному алгоритму. Первый шар покрасим в черный цвет. Идём по порядку по всем лункам. При рассмотрении лунки мы окрашиваем k шаров в белый цвет и один в черный, где k – количество фишек в очередной лунке. Тогда в получившейся раскраске окажется 18 белых шаров (просто по количеству фишек), первый шар по построению черный, последний является черным так как после рассмотрения последней лунки мы добавили черный шар, а всего черных шаров вместе с первым будет столько же, сколько лунок плюс один начальный. Значит мы получили объект из множества различных раскрасок шаров.

Доказательство того, что объекты при этом различаются аналогично предыдущему: достаточно аккуратно рассмотреть первую лунку, количество фишек в которой для двух расположений различно. Оставим эту часть для участников.

Аналогично предыдущему пункту мы показали, что мощность первого множества не меньше мощности второго множества. Значит они равномощны. Тогда для ответа на задачу можно посчитать количество элементов в множестве раскрасок шаров.

Для подсчета таких элементов нам необходимо посчитать количество способов выбрать 23 шара из 41, которые будут являться черными. Это количество сочетаний из 41 по 23 – это и есть ответ на задачу.

Критерии оценки

Просто сослаться на формулу шаров и перегородок в этой задаче не достаточно. Решения, который используют её без доказательства оцениваются в 0 баллов.

Разбор

Задание 1. (25 баллов) Современное искусство порой очень необычная штука. Так и в этот раз, посещая новую выставку, Саша встретил очень необычную картину. Она представляла собой табличку из 512 столбцов и 2048 строк, при этом в каждой клеточке таблицы находилось какое-то целое число. По пути домой Саша, конечно же, забыл какие именно числа были в каждой из клеток. Зато Саша помнил, что для каждого набора клеточек, образующего квадрат 2×2 клеточек выполнялось, что сумма чисел в этих клетках равнялась 64. Больше современного искусства Саша любит только странные вопросы к олимпиадным задачам, поэтому он просит Вас вычислить сумму чисел, написанных в клетках, находящихся по периметру картины. То есть таких клеток, что располагаются в первом или последнем столбцах, или в первой, или последней строчках.

Решение

Для решения задачи сначала покажем, что сумма чисел в прямоугольнике со сторонами $2n \times 2m$ равна $64 \times nm$. Для этого достаточно показать, что такой прямоугольник разбивается на nm непересекающихся квадратов 2×2. Действительно, мы просто разбиваем каждую из сторон на n и m соответственно частей длины 2, и получившаяся сетка является подходящим разбиением.

Тогда ответов на задачу будет разность суммы в исходной таблице и в таблице без периметра. То есть из суммы чисел в таблице 512×2048 мы вычитаем сумму чисел в таблице 510×2046. Получаем $64(256 \times 1024 - 255 \times 1023) = 81856.$

Критерии оценки

Ответ без объяснений оценивался в 0 баллов.

Решения оценивались из 25 баллов в зависимости от строгости утверждений.

За арифметические ошибки снимался 1 балл в случае, если формула была написана корректно.

Задание 2. (25 баллов) Гриша увлекается рисованием. В данный момент он хочет изобразить пейзаж с двумя горами. Для простоты Гриша решил, что поверхность земли он изобразит в качестве прямой линии, а горы в виде двух равнобедренных треугольников, основанием лежащих на линии земли. Углы при основании гор равняются 45°.
С одной стороны, Гриша планирует сохранить аутентичность пейзажа, поэтому он хочет, чтобы общая протяженность поверхности гор равнялась X условных единиц.
С другой стороны, немного художественного вымысла не помешает, поэтому Гриша хочет минимизировать площадь гор на рисунке, чтобы сэкономить краску.
Помогите Грише найти минимальную площадь гор на рисунке, если общая протяженность поверхности гор равняется 4096.

Решение

Для начала заметим, что равнобедренные треугольники с углом при основании равным 45° являются прямоугольными. Пусть катеты треугольников равны a и b соответственно. Тогда из условия на общую протяженность поверхности гор получаем, что $2a + 2b = 4096$ или же $a + b = 2048$.
Обозначим $a = 1024 + x, b = 1024 - x$, где $x \geq 0$

Тогда нам нужно минимизировать функцию $\frac{a^2+b^2}{2} \rightarrow min$.

$$\frac{(1024+x)^2+(1024-x)^2}{2} \rightarrow min \Leftrightarrow (1024 + x)^2 + (1024 - x)^2 \rightarrow min \Leftrightarrow 2^{21} + 2x^2 \rightarrow min \Leftrightarrow 2x^2 \rightarrow min$$

Последнее выражение минимально при $x = 0$. Так как переходы были равносильными, то и исходная функция при этом минимальна.

Таким образом минимальная площадь равна $\frac{1024^2 + 1024^2}{2} = 1024^2 = 2^{20}$.

Критерии оценки

В задаче не подразумевалась возможность пересечения гор. Решения, которые рассматривают эти случаи оценивались в зависимости от их корректности.

Решения, не содержащие доказательства, что минимальная площадь достигается при равенстве сторон оценивались в 0 баллов.

Задание 3. (25 баллов) Саша недавно научился играть в нарды. Но правила игры показались ему слишком сложными, поэтому он решил их упростить.

Поскольку Саша не любит играть с кем-то, то в первую очередь он решил, что будет играть один и не будет ни с кем соревноваться. Затем Саша решил, что начинать из одной и той же позиции – это скучно, поэтому начал экспериментировать. Теперь он просто располагает фишки по каким-то лункам и начинает с такой конфигурации.

Более формально, поле для игры в нарды состоит из 24 лунок. У Саши есть 18 фишек, которые он изначально расставляет по лункам. В лунке может стоять любое количество фишек.

Теперь Саше стало интересно, сколько же существует вариантов стартовых позиций. Помогите ему ответить на этот вопрос.

Решение

Пусть у нас есть 41 шарик расположенные в линию, 23 из которых окрашены в черный цвет, а остальные в белый. Для удобства добавим к ним в начале и конце по одному черному шару.

Покажем для начала, как из такого объекта получить соответствующее ему размещение фишек по лункам.

У нас есть 24 черных шара. Пронумеруем их по порядку вхождения в линию, начиная с 0, и в лунку с номером n (лунки нумеруем с 1) поместим столько фишек, сколько белых шаров находится между шарами с номерами $n - 1$ и n. Так как белых шаров 18, то на поле окажется ровно 18 фишек.

Покажем, что две различных раскраски шаров дадут нам разные расположения фишек по лункам. Для этого рассмотрим первый шар в двух раскрасках, цвет которого различается. Пусть в первой раскраске он имеет белый цвет, а во второй – чёрный, который имеет номер k. Тогда очевидно, что количество фишек в лунке с номером k в первом и втором случае будет отличаться. Значит полученные образы такого преобразования различны для различных раскрасок.

Мы показали, что для каждого элемента множества всех раскрасок шаров существует образ в множестве расположений фишек по лункам и при этом они различны. Значит, мощность второго множества не меньше мощности первого множества.

Покажем теперь обратное. У нас есть какое-то размещение фишек по лункам и мы хотим показать, как мы преобразуем его в раскраску шаров. Для этого будем действовать по обратному алгоритму. Первый шар покрасим в черный цвет. Идём по порядку по всем лункам. При рассмотрении лунки мы окрашиваем k шаров в белый цвет и один в черный, где k – количество фишек в очередной лунке. Тогда в получившейся раскраске окажется 18 белых шаров (просто по количеству фишек), первый шар по построению черный, последний является черным так как после рассмотрения последней лунки мы добавили черный шар, а всего черных шаров вместе с первым будет столько же, сколько лунок плюс один начальный. Значит мы получили объект из множества различных раскрасок шаров.

Доказательство того, что объекты при этом различаются аналогично предыдущему: достаточно аккуратно рассмотреть первую лунку, количество фишек в которой для двух расположений различно. Оставим эту часть для участников.

Аналогично предыдущему пункту мы показали, что мощность первого множества не меньше мощности второго множества. Значит они равномощны. Тогда для ответа на задачу можно посчитать количество элементов в множестве раскрасок шаров.

Для подсчета таких элементов нам необходимо посчитать количество способов выбрать 23 шара из 41, которые будут являться черными. Это количество сочетаний из 41 по 23 – это и есть ответ на задачу.

Критерии оценки

Просто сослаться на формулу шаров и перегородок в этой задаче не достаточно. Решения, который используют её без доказательства оцениваются в 0 баллов.

Задание 4. (25 баллов) Антон увлекается математикой и сегодня он изучает *красоту* натуральных чисел. Красотой натурального числа X Антон считает количество пар натуральных чисел a и b, таких что их наибольший общий делитель равняется 1, а их произведение равняется X. Помогите Антону найти ответы на следующие вопросы.

1) (4 балла) Какова *красота* числа 101?
2) (21 балл) Какая максимальная *красота* среди первых 1024 натуральных чисел?

Решение

Разложение исходного числа X на простые множители: $\prod_i p_i^{x_i}$.

Рассмотрим такую пару чисел a и b, что $ab = X$ и $gcd(a, b) = 1$. Очевидно, что оба числа содержат в себе только простые числа, которые присутствуют в разложении числа X. При этом они не могут одновременно делиться на одно и то же простое число, так как это противоречит условию о взаимной простоте. Тогда каждый множитель вида $p_i^{x_i}$ из разложения X лежит в одном из чисел a или b.

Тогда зная разложение числа X на простые множители, а точнее количество k различных простых чисел в нём, мы можем посчитать его красоту. Для этого достаточно посчитать количество способов разбить k элементов на два неупорядоченных множества – оно равно 2^{k-1}.

Из этого следует, что ответ для первого пункта равна 1, так как 101 – простое.

Мы показали, что красота числа зависит только от количества различных простых чисел в разложении и увеличивается с увеличением этого параметра.

Покажем, что среди первых натуральных чисел нет числа, которое содержит в разложении хотя бы 5 различных простых чисел. Рассмотрим произвольное такое число Y. Не умаляя общности, будем считать, что все простые числа в нём содержаться в первой степени (а иначе просто поделим на лишние множители – число только уменьшится). Теперь рассмотрим 5 наименьших простых в разложении. Заметим, что если мы заменим их на наименьших пять простых среди всех простых чисел, то число не увеличится. Тогда $Y > 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 = 2310$. Значит таких чисел нет среди первых 1024 натуральных.

Число, в котором содержится 4 простых – $210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$. Его красота равна 8.

Критерии оценки

В некоторых решениях считались упорядоченные пары. Это не влияло на оценку.

Разбор

Задание 1. (25 баллов) Рассмотрим все пары целых чисел a и b, таких что $1 \leq a \leq b \leq 2048$. Для скольких из них выполняется следующее неравенство: $\gcd(a,\ b)\ <\ a\ xor\ b$?

- $\gcd(a,\ b)$ — наибольший общий делитель чисел a и b
- Напоминаем, что xor двух чисел вычисляется следующим образом: оба числа переводятся в двоичную систему, в результирующем числе на i-ой позиции в двоичной записи стоит 1 тогда и только тогда, когда значения i-ых битов операндов (то есть тех чисел, xor которых мы считаем) различаются.

Например, $7_{10}\ xor\ 5_{10}\ =\ 111_2\ xor\ 101_2\ =\ 010_2\ =\ 2_{10}$

Критерии оценки

К сожалению, в этой задаче содержится опечатка. Изначально планировалось, что знак в неравенстве будет противоположный.

В получившейся формулировке задача гораздо сложнее.

Все решения оценивались в 0 баллов.

Задание 2. (25 баллов) Современное искусство порой очень необычная штука. Так и в этот раз, посещая новую выставку, Саша встретил очень необычную картину. Она представляла собой табличку из n столбцов и m строк, при этом в каждой клеточке таблицы находилось какое-то целое число. По пути домой Саша, конечно же, забыл какие именно числа были в каждой из клеток. Зато Саша помнил, что для каждого набора клеточек, образующего полоску размером 1×3 (а также 3×1) клеточек выполнялось, что сумма чисел в этих клетках равнялась 32.
Больше современного искусства Саша любит только странные вопросы к олимпиадным задачам, поэтому он просит Вас вычислить сумму чисел, написанных в клетках, находящихся по периметру картины. То есть таких клеток, что располагаются в первом и последнем столбцах, и в первой, и последней строчках.
1) (3 балла) Помогите Саше ответить на вопрос задачи при $n = 256$ и $m = 1024$.
2) (22 балла) Помогите Саше ответить на вопрос задачи при $n = 503$ и $m = 2024$. Но при условии, что один из уголков, то есть квадратик 1×1, вырезан из картины.

Решение

Для решения первого пункта достаточно показать, как именно разбивается периметр картины на полоски 1×3. Для этого расположим в первой строке непересекающиеся полоски 1×3. После этого у нас останется одна клетка, так как 256 даёт остаток 1 при делении на 3. Воспользуемся пустой клеткой, оставшейся после замощения, в первой строке и замостим столбец. В нём аналогично останется одна пустая клетка в конце, так как 1024 даёт остаток 1 при делении на 3. Повторим эту операцию для нижней строки и оставшегося столбца – получим разбиение периметра на полоски 1×3.

Осталось посчитать количество таких полосок в разбиении: $255 \div 3 \times 2 + 1023 \div 3 \times 2 = 852$. И для получения ответа умножим это число на 32, получим $852 \times 32 = 27264$.

Во втором пункте покажем, что достижима произвольная сумма. Будем считать, что вырезан правый нижний уголок. Покажем, что для произвольного числа X существует картина с такой суммой на периметре без одного уголка.

0	0	32
$X - 53824$	0	$53856 - X$
$53856 - X$	32	$X - 53856$

Замостим всю таблицу при помощи показанного выше квадрата 3×3, просто циклично повторяя его. Для данного квадрата можно убедиться, что все условия выполняются. Очевидно, что и любой его циклический сдвиг не нарушает условий, а значит мы получим корректную с точки зрения условий раскраску. Оставим эту часть для доказательства участникам.

Теперь посчитаем исходную сумму. Для этого заметим, что полоски на периметре без уголков будут иметь длину, кратную 3, а значит разбиваются на полоски 1×3. Сумма в этих полосках равна $(501 + 2022) \div 3 \times 2 \times 32 = 53824$. Также заметим, что исходя из построения в нижнем левом уголке всей таблицы будет стоять число, которое расположено во второй строке первом столбце нашей таблицы 3×3, так как длина стороны даёт остаток 2 при делении на 3. Аналогично в правом верхнем углу таблицы стоит число, которое расположено в первой строке втором столбце таблицы 3×3.

Тогда вся сумма равна сумме полосок и сумме чисел в уголках: $(0 + 0 + X - 53824) + 53824 = X$.

Критерии оценки

Решения, которые доказывали неоднозначность суммы оценивались из 18 баллов.

Задание 3. (25 баллов) Один из способов задавать перестановку чисел от 1 до n – это ориентированный граф, где из вершины с номером i выходит ориентированное ребро в вершину с номером $f(i)$, где $f(i)$ – это значение, которое располагается на позиции i. Очевидно, что в таком графе могут быть циклы. Будем задавать циклы как множество номеров вершин, которые в него входят. Пусть функция

$$s(X) = \sum_{x \in X} 2^x$$

где X - цикл, представленный способом, описанным выше. Пусть $C(P)$ – множество всех циклов перестановки P. Зададим функцию $g(P)$, где P – это перестановка чисел от 1 до n. Для вычисления функции $g(P)$ нужно от каждого элемента $C(P)$ посчитать функцию s, а затем взять xor получившихся значений. Иначе говоря

$$g(P) = xor_{x \in C(P)} s(x).$$

Вам же нужно посчитать значение, которое получится, если взять xor значений функции g по всем перестановкам чисел от 1 до n.

Решение

Для начала покажем, что такой граф представляет из себя набор непересекающихся циклов. Очевидно, что из каждой вершины выходит ровно одно ребро по построению. Так же легко заметить, что так как все $f(i)$ различны из-за того, что это перестановка, и каждое значение от 1 до n встречается среди значений $f(i)$, то и входящая степень каждой вершины равна 1.

Рассмотрим произвольную вершину графа. Будем двигаться по рёбрам этого графа, начиная с этой вершины, пока мы можем продолжить путь, не заходя в посещенные вершины. Так как выходящее ребро у нас всегда есть, то рассмотрим, куда оно может вести:

1) новая вершина
2) посещенная вершина, отличная от исходной
3) исходная вершина

При этом второй случай невозможен, так как тогда мы получаем, что у посещенной вершины входящая степень больше 1. А в первом случае мы всегда можем повторить шаг, так как исходящее ребро из неё тоже есть. Значит, так как граф конечен, то мы всегда окажемся в исходной вершине, то есть граф разбивается на циклы.

Осталось заметить, что такие циклы не пересекаются. Для этого достаточно сослаться на то, что входящие и исходящие степени вершин равны 1, что невозможно при пересечении циклов.

Получаем, что каждая вершина лежит в каком-то цикле, и при том ровно в одном.

Рассмотрим значение $s(X)$. Эта функция просто ставит 1 в битовой записи числа на элементах с номерами, равными номерам вершин в цикле. Так как мы получили, что каждая вершина i лежит ровно в одном цикле, то при вычислении $g(P)$ найдётся только один элемент из членов выражения, для которого i-ый бит равен 1. А значит в результате мы получим число, в битовой записи которого с 1 по n-ый бит стоят единицы – такое число $2^{n+1} - 2$.

Мы получили, что значение $g(P)$ не зависит от перестановки, а только от её длины.

Тогда искомый ответ равен xor от $n!$ одинаковых элементов.

Теперь осталось заметить, что при $n = 1$ у нас существует ровно одна такая перестановка и ответ будет равен 2.

При $n > 1$, количество одинаковых элементов будет четным, и пользуясь свойством xor ($x \; xor \; x = 0$) получаем, что искомое значение равно 0.

Критерии оценки

Доказательство того, что граф имеет такой вид оценивалось из 8 баллов.

Доказательство факта, что $g(P)$ не зависит от перестановки оценивалось из 8 баллов.

Задание 4. (25 баллов) Здесь могло бы быть длинное, красивое и запутанное условие задачи, но авторы задач устали, поэтому вот Вам функция от двух переменных

$$F(n,\ k)\ =\ \sum_{i=1}^{n} \gcd(i,\ i\ +\ k)$$

где $\gcd(a,\ b)$ — наибольший общий делитель чисел a и b.

1) (1 балл) Найдите $F(7,\ 7)$

2) (24 балла) Найдите $F(1024,\ 1024)$

Решение

В первом подпункте можно было аккуратно посчитать исходную функцию руками и получить ответ 13.

Перейдём ко второму пункту.

Для начала заметим, что $\gcd(i,\ i\ +\ k)\ =\ gcd(i,\ k)$. Это следствие алгоритма Евклида.

Тогда во втором пункте НОД может принимать значения равные делителям 1024, то есть степеням двойки от 1 до 1024.

Найдём, сколько чисел дают значение $gcd(i,\ 1024)\ =\ 2^{a}$. Нетрудно заметить, что подходят все числа, которые делятся на 2^{a}, но не делятся на 2^{a+1}. Осталось заметить, что для подсчёта количества чисел, которые делятся на 2^{a} достаточно поделить 1024 на 2^{a}. Тогда получаем формулу $\left[\frac{2^{10}}{2^{a}}\right]-\left[\frac{2^{10}}{2^{a+1}}\right]$, где $[x]$ – деление с округлением вниз.

При $a\ <\ 10$ вклад таких чисел в сумму будет равен $\frac{2^{11}-2^{10}}{2^{a+1}}\times 2^{a}\ =\ 512$. При $a\ =\ 10$ вклад равен 1024.

Получаем ответ $512\ \times\ 10\ +\ 1024\ =\ 6144.$

Разбор

Задание 1. (25 баллов) Современное искусство порой очень необычная штука. Так и в этот раз, посещая новую выставку, Саша встретил очень необычную картину. Она представляла собой табличку из n столбцов и m строк, при этом в каждой клеточке таблицы находилось какое-то целое число. По пути домой Саша, конечно же, забыл какие именно числа были в каждой из клеток. Зато Саша помнил, что для каждого набора клеточек, образующего полоску размером 1×3 (а также 3×1) клеточек выполнялось, что сумма чисел в этих клетках равнялась 32.

Больше современного искусства Саша любит только странные вопросы к олимпиадным задачам, поэтому он просит Вас вычислить сумму чисел, написанных в клетках, находящихся по периметру картины. То есть таких клеток, что располагаются в первом и последнем столбцах, и в первой, и последней строчках.

1) (3 балла) Помогите Саше ответить на вопрос задачи при $n = 256$ и $m = 1024$.

2) (22 балла) Помогите Саше ответить на вопрос задачи при $n = 503$ и $m = 2024$. Но при условии, что один из уголков, то есть квадратик 1×1, вырезан из картины.

Решение

Для решения первого пункта достаточно показать, как именно разбивается периметр картины на полоски 1×3. Для этого расположим в первой строке непересекающиеся полоски 1×3. После этого у нас останется одна клетка, так как 256 даёт остаток 1 при делении на 3. Воспользуемся пустой клеткой, оставшейся после замощения, в первой строке и замостим столбец. В нём аналогично останется одна пустая клетка в конце, так как 1024 даёт остаток 1 при делении на 3. Повторим эту операцию для нижней строки и оставшегося столбца – получим разбиение периметра на полоски 1×3.

Осталось посчитать количество таких полосок в разбиении: $255 \div 3 \times 2 + 1023 \div 3 \times 2 = 852$. И для получения ответа умножим это число на 32, получим $852 \times 32 = 27264$.

Во втором пункте покажем, что достижима произвольная сумма. Будем считать, что вырезан правый нижний уголок. Покажем, что для произвольного числа X существует картина с такой суммой на периметре без одного уголка.

0	0	32
$X - 53824$	0	$53856 - X$
$53856 - X$	32	$X - 53856$

Замостим всю таблицу при помощи показанного выше квадрата 3×3, просто циклично повторяя его. Для данного квадрата можно убедиться, что все условия выполняются. Очевидно, что и любой его циклический сдвиг не нарушает условий, а значит мы получим корректную с точки зрения условий раскраску. Оставим эту часть для доказательства участникам.

Теперь посчитаем исходную сумму. Для этого заметим, что полоски на периметре без уголков будут иметь длину, кратную 3, а значит разбиваются на полоски 1×3. Сумма в этих полосках равна $(501 + 2022) \div 3 \times 2 \times 32 = 53824$. Также заметим, что исходя из построения в нижнем левом уголке всей таблицы будет стоять число, которое расположено во второй строке первом столбце нашей таблицы 3×3, так как длина стороны даёт остаток 2 при делении на 3. Аналогично в правом верхнем углу таблицы стоит число, которое расположено в первой строке втором столбце таблицы 3×3.

Тогда вся сумма равна сумме полосок и сумме чисел в уголках: $(0 + 0 + X - 53824) + 53824 = X$.

Критерии оценки

Решения, которые доказывали неоднозначность суммы оценивались из 18 баллов.

Задание 2. (25 баллов) Будем называть *красотой* массива из N положительных целых чисел следующее выражение

$$\sum_{i=0}^{N-1} \left| a_i - a_{i+1} \right|$$

где a_i — элемент массива с номером i. Назовем *минимальной красотой* наименьшее значение *красоты* массива по всем его перестановкам, иными словами по всем способам переупорядочить элементы массива. Сколько существует массивов с *минимальной красотой* и *красотой* равной 2048 из 1024 положительных целых чисел, не превосходящих 10000?

Разбор

Расположим точки нашего массива на числовой прямой. Сегментами будем называть отрезки прямой, которые заключены между соседними по возрастанию точками. Заметим, что красота в такой интерпретации является длиной пути обхода наших точек. Так как путь проходит через все точки, в том числе через крайние, а он является непрерывным, то каждая из точек между крайними является покрытой нашим путём. Значит оценка снизу на длину нашего пути – это разность значения максимума и минимума в массиве. При этом он достигается при отсортированном массиве. Действительно, тогда каждый сегмент покрыт ровно один раз.

Покажем, что если исходный массив не является отсортированным в убывающем или возрастающем порядке, то его красота не является минимальной. Не умаляя общности будем считать, что префикс массива является отсортированным по возрастанию. Из всех таких префиксов рассмотрим префикс с максимальной длиной k. Следующий элемент a_{k+1} нарушает отсортированность, а значит сегмент от $max(a_{k-1}, a_{k+1})$ до a_k будет входить в сумму более 1 раза.

Теперь мы знаем, что искомые массивы являются отсортированными в убывающем или возрастающем порядке, причём разность между максимумом и минимум равна 2048.

Минимумом в таком массиве может быть любое число от 1 до 7952. Максимум при этом фиксирован, значит нам осталось выбрать 1022 числа с повторениями со значениями из 2048 возможных.

Далее мы хотим показать, как решение этой задачи сводится к выбору 2047 шариков из 3069. Подробный разбор сведения одной задачи к другой описан в разборе 4 задачи 8 класса. Он должен быть в вашем решении, но для краткости мы его здесь не приводим, хотя и опишем основные шаги далее.

1) Показываем, как из любого размещения шаров получить какой-то способ выбрать числа. Доказываем, что для двух различных размещений получаются два различных способа выбрать числа. Это показывает нам, что мощность первого множества не больше мощности второго множества.
2) Показываем, как из какого-то способа выбрать числа получить способ размещения шаров. Доказываем, что для двух различных способов получаются два различных размещения. Получаем обратное соотношение между мощностями.
3) Значит, что эти множества равномощны.

Получаем, что ответ равен $7952 \times 2 \times C_{3069}^{2047}$.

Задание 3. (25 баллов) Один из способов задавать перестановку чисел от 1 до n – это ориентированный граф, где из вершины с номером i выходит ориентированное ребро в вершину с номером $f(i)$, где $f(i)$ – это значение, которое располагается на позиции i. Очевидно, что в таком графе могут быть циклы. Будем задавать циклы как множество номеров вершин, которые в него входят. Пусть функция

$$s(X) = \sum_{x \in X} 2^x$$

где X - цикл, представленный способом, описанным выше. Пусть $C(P)$ – множество всех циклов перестановки P. Зададим функцию $g(P)$, где P – это перестановка чисел от 1 до n. Для вычисления функции $g(P)$ нужно от каждого элемента $C(P)$ посчитать функцию s, а затем взять xor получившихся значений. Иначе говоря

$$g(P) = xor_{x \in C(P)} s(x)$$

Вам же нужно посчитать значение, которое получится, если взять xor значений функции g по всем перестановкам чисел от 1 до n.

Решение

Для начала покажем, что такой граф представляет из себя набор непересекающихся циклов. Очевидно, что из каждой вершины выходит ровно одно ребро по построению. Так же легко заметить, что так как все $f(i)$ различны из-за того, что это перестановка, и каждое значение от 1 до n встречается среди значений $f(i)$, то и входящая степень каждой вершины равна 1.

Рассмотрим произвольную вершину графа. Будем двигаться по рёбрам этого графа, начиная с этой вершины, пока мы можем продолжить путь, не заходя в посещенные вершины. Так как выходящее ребро у нас всегда есть, то рассмотрим, куда оно может вести:

1) новая вершина
2) посещенная вершина, отличная от исходной
3) исходная вершина

При этом второй случай невозможен, так как тогда мы получаем, что у посещенной вершины входящая степень больше 1. А в первом случае мы всегда можем повторить шаг, так как исходящее ребро из неё тоже есть. Значит, так как граф конечен, то мы всегда окажемся в исходной вершине, то есть граф разбивается на циклы.

Осталось заметить, что такие циклы не пересекаются. Для этого достаточно сослаться на то, что входящие и исходящие степени вершин равны 1, что невозможно при пересечении циклов.

Получаем, что каждая вершина лежит в каком-то цикле, и при том ровно в одном.

Рассмотрим значение $s(X)$. Эта функция просто ставит 1 в битовой записи числа на элементах с номерами, равными номерам вершин в цикле. Так как мы получили, что каждая вершина i лежит ровно в одном цикле, то при вычислении $g(P)$ найдётся только один элемент из членов выражения, для которого i-ый бит равен 1. А значит в результате мы получим число, в битовой записи которого с 1 по n-ый бит стоят единицы – такое число $2^{n+1} - 2$.

Мы получили, что значение $g(P)$ не зависит от перестановки, а только от её длины.

Тогда искомый ответ равен xor от $n!$ одинаковых элементов.

Теперь осталось заметить, что при $n = 1$ у нас существует ровно одна такая перестановка и ответ будет равен 2.

При $n > 1$, количество одинаковых элементов будет четным, и пользуясь свойством xor ($x\ xor\ x = 0$) получаем, что искомое значение равно 0.

Критерии оценки

Доказательство того, что граф имеет такой вид оценивалось из 8 баллов.

Доказательство факта, что $g(P)$ не зависит от перестановки оценивалось из 8 баллов.

Задание 4. (25 баллов) Здесь могло бы быть длинное, красивое и запутанное условие задачи, но авторы задач устали, поэтому вот вам функция от двух переменных

$$F(n,\ k)\ =\ \sum_{i=1}^{n} \gcd(i,\ i\ +\ k)$$

где $\gcd(a,\ b)$ — наибольший общий делитель чисел a и b.

1) (1 балл) Найдите $F(10,\ 7)$

2) (24 балла) Найдите $F(1621620,\ 16380)$

Разбор

В первом подпункте можно было аккуратно посчитать исходную функцию руками и получить ответ 16.

Перейдём ко второму пункту.

Для начала заметим, что $\gcd(i,\ i\ +\ k)\ =\ gcd(i,\ k)$. Это следствие алгоритма Евклида.

Тогда во втором пункте НОД может принимать значения равные делителям 16380.

Также заметим, что при $x\ <\ k$ по тому же самому алгоритму Евклида $gcd(nk\ +\ x,\ k)\ =\ gcd(x,\ k)$.

Тогда $F(nk,\ k)\ =\ n\ \cdot\ F(k,\ k)$.

Научимся теперь считать $F(p^n,\ p^n)$. Для этого научимся считать количество чисел от 1 до p^n, для которых $gcd(x,\ p^n)\ =p^k$. Легко заметить, что это $\left[\frac{p^n}{p^k}\right]-\left[\frac{p^n}{p^{k+1}}\right]$, где $[x]$ – деление с округлением вниз. .

Вклад таких чисел в сумму при $k\ <\ n$ будет равен $(\frac{p^n}{p^k}-\frac{p^n}{p^{k+1}})\ \cdot p^k=\frac{p^{n+1}-p^n}{p}=p^{n-1}(p\ -\ 1)$.

При $k\ =\ n$ получаем единственное слагаемое равное p^n.

Тогда формула для $F(p^n, p^n)\ =\ np^{n-1}(p\ -\ 1)\ +p^n$.

Теперь покажем, что для взаимнопростых чисел a и b выполняется $F(ab, ab)\ =\ F(a, a)\ \cdot\ F(b, b)$.

Рассмотрим правую часть это выражения как произведение двух скобок из слагаемых. При этом очевидно, что итоговое количество слагаемых при произведении будет совпадать с количеством слагаемых в левой части выражения.

Воспользуемся китайской теоремой об остатках. Тогда у нас существует биекция между парой остатков при делении на a и b соответственно и остатком при делении на ab.

Пусть такой паре остатков r_1 и r_2 соответствует остаток N. Мы хотим показать, что $gcd(N,\ ab)\ =\ gcd(r_1, a)\ \cdot\ gcd(r_2,\ b)$. Для этого заметим, что $gcd(N,\ ab)\ =\ gcd(N,\ a)\ \cdot\ gcd(N,\ b)$ из-за того, что a и b взаимнопросты. При этом $gcd(N,\ a)\ =\ gcd(xa\ +\ r_1,\ a)\ =\ gcd(r_1,\ a)$ и аналогично $gcd(N,\ b)\ =\ gcd(r_2, b)$, что доказывает необходимое утверждение.

Получаем, что левая и правая суммы поэлементно равны. А значит равны и сами суммы.

Для ответа на задачу осталось разложить 16380 на простые множители и подставить значения в формулу.