8 класс

Задача 1

Данил и Саша живут на шахматной доске со стороной длиной N клеток, где N — целое положительное число. Данил живет в левом нижнем углу, а Саша в правом верхнем. Ребята настолько похожи, что перемещаются по доске похожим образом. Данил может перемещаться по доске следующим образом:

- Перейти на одну клетку вверх, при этом Саша одновременно с этим переместится на одну клетку вниз.
- Перейти на одну клетку вправо, при этом Саша одновременно с этим переместится на одну клетку влево.

Каждый из ребят хочет дойти до дома другого, чтобы оставить там сюрприз. Однако, если в какой-то момент ребята окажутся в одной клетке, то увидят друг друга и сюрприз будет испорчен. Помогите ребятам подсчитать количество различных маршрутов, таких что они дойдут до домов друг друга и при этом не встретятся. Два маршрута считаются различными, если существует хотя бы один момент времени, где в одном маршруте Саша пошел вниз, а в другом налево.

Решение

Сначала сделаем несколько замечаний:

1) Друзья могут встретиться только в центре доски, так как они проходят одинаковое расстояние в каждом из направлений.
2) Для доски четного размера ребята никогда не встретятся. Для доказательства этого замечания нужно было рассмотреть случай, когда ребята прошли по половине доски в каждом из направлений и перебрать их возможные ходы.

Вместо того, чтобы считать количество путей, когда они не встретятся, посчитаем количество путей, когда они встретились и вычтем это значения из количества всех путей.

Так как друзья могут встретиться только в центральной клетке доски, то нужно посчитать сколько путей проходит через центральную клетку. Это значение равно количеству путей из одного угла в центральную клетку и из нее до другого угла.

Считается это по формуле сочетаний. Без ограничения общности будем считать пути Данила, обозначим за $X = \lfloor N / 2 \rfloor + 1$, тогда количество путей до центральной клетки равняется $\mathrm{C}_{2X}{}^{X}$, так как нам нужно выбрать X движений вверх, остальные будут движениями вправо. Аналогично вычисляется количество путей от центральной клетки до правого верхнего угла. Отсюда получаем, что количество путей при которых ребята встретятся равняется $(\mathrm{C}_{2X}{}^{X})^2$. Из похожих соображений вычисляется общее количество путей, оно равно $C_{2N}{}^{N}$. Для получения итогового ответа нужно из общего количества путей вычесть количество неподходящих путей, подставив вместо X нужные значения.

Задача 2

Саша очень любит гулять по Екатеринбургу и в уме проверять числа на простоту. Но поскольку Саша прогуливал лекции по теории чисел, то проверяет он их не совсем обычным способом. Саша считает число N простым, если для всех чисел p таких, что $p^2 < N$ и p — простое по его мнению, выполняется следующее условие: p не делит N нацело. Также Саша абсолютно точно уверен, что число 2 — простое.

Мы очень хотим показать Саше, что он не прав, поэтому помогите нам подсчитать насколько различается количество простых чисел в классическом смысле и количество простых чисел по версии Саши среди положительных целых чисел меньших 10000.

Напомним, что простым числом в классическом смысле является число, которое делится только на 1 и на само себя.

Решение

Заметим, что при проверке на простоту Саша неправильно проверяет числа вида p^2, где p – некоторое простое в привычном понимании, так как не рассматривает единственный его делитель отличный от 1 и его самого. Таким образом он считает простыми также и квадраты простых чисел. Для того, чтобы найти на сколько ошибся Саша достаточно любым способом посчитать количество простых чисел меньших 100.
Также заметим, что простые по версии Саши никак не влияют на алгоритм проверки на простоту, так как если число X делится на p^2, то оно делится и на p, а число p точно меньше квадратного корня из X, значит Саша не будет считать такое число простым.

Задача 3

У Васи и Пети есть n кучек камней. Кучки пронумерованы от 1 до n, в кучке с номером k лежит kn камней.
Ребята играют в игру, игроки ходят по очерди, первый ход делает Петя. За ход в игре можно выбрать кучку, забрать из неё $n-1$ камень, а затем из $n-1$ других кучек забрать по одному камню и положить их в исходную кучку. При этом если невозможно забрать $n-1$ камень из выбранной в текущий ход кучки или же по 1 камню из всех $n-1$ других кучек, то ход невозможен.
Проигрывает тот, кто не может сделать ход.
Кто выигрывает при правильной игре?

Решение

Ключевая идея решения состоит в том, что игра становится детерминированной, как только появляется кучка размера $n-2$.
Случай, когда $n=1$ очевиден. Далее будем считать, что $n > 1$.

Рассмотрим случай, когда n – чётное. Опишем выигрышную стратегию для второго игрока.
Если на первом ходу Петя забирает камни не из первой кучки, то Вася может просто повторять ход за ним. Он сможет так сделать, так как после хода Пети в этом случае всегда будет нечётное количество камней в первой кучке.
Если же на первом ходу Петя забирает камни из первой кучки, то опять-таки Вася может просто повторить ход за ним. Очевидно, что как только Петя заберёт камни не из первой кучки, то повторится процесс, описанный выше и Петя проиграет. Иначе после n таких ходов, появится ещё одна кучка, размера n. Так как n чётное, то произойдёт это как раз перд ходом Пети.

Если n нечётное, то первым ходом Петя может забрать камни из второй кучки.
Тогда если Вася забирает камни не из первой кучки, то мы повторяем ход за ним. После этого в первой кучке остаётся чётное количество камней – $n-3$. Далее Петя может всегда повторять ход за Васей (это тоже нужно доказать), а так как количество камней в первой кучки с каждым ходом уменьшается на один, то Петя выиграет.
Если своим ходом Вася забирает камни из первой кучки, то тогда мы оказываемся в ситуации, когда в первых двух кучках лежат $n-1$ и $2n-1$ камней соответственно. Тогда Петя может забрать камни из первой кучки. Заметим, что рассуждения про ход Васи остаются аналогичными, то есть при отнимании камней не из первой кучки он проигрывает. В противном же случае Петя просто повторяет ход за ним. Именно после хода Пети в кучках окажется $n-1$ и $n-1$ камней соответственно. Очевидно, что в этом случае Вася проигрывает.

9 класс

Задача 1

Саша очень любит гулять по Екатеринбургу и в уме проверять числа на простоту. Но поскольку Саша прогуливал лекции по теории чисел, то проверяет он их не совсем обычным способом. Саша считает число N простым, если для всех чисел p таких, что $p^2 < N$ и p — простое по его мнению, выполняется следующее условие: p не делит N нацело. Также Саша абсолютно точно уверен, что число 2 — простое.

Мы очень хотим показать Саше, что он не прав, поэтому помогите нам подсчитать насколько различается количество простых чисел в классическом смысле и количество простых чисел по версии Саши среди положительных целых чисел меньших 10000.

Напомним, что простым числом в классическом смысле является число, которое делится только на 1 и на само себя.

Решение

Заметим, что при проверке на простоту Саша неправильно проверяет числа вида p^2, где p – некоторое простое в привычном понимании, так как не рассматривает единственный его делитель отличный от 1 и его самого. Таким образом он считает простыми также и квадраты простых чисел. Для того, чтобы найти на сколько ошибся Саша достаточно любым способом посчитать количество простых чисел меньших 100.

Также заметим, что простые по версии Саши никак не влияют на алгоритм проверки на простоту, так как если число X делится на p^2, то оно делится и на p, а число p точно меньше квадратного корня из X, значит Саша не будет считать такое число простым.

Задача 2

У Васи и Пети есть n кучек камней. Кучки пронумерованы от 1 до n, в кучке с номером k лежит kn камней.

Ребята играют в игру, игроки ходят по очерди, первый ход делает Петя. За ход в игре можно выбрать кучку, забрать из неё $n - 1$ камень, а затем из $n - 1$ других кучек забрать по одному камню и положить их в исходную кучку. При этом если невозможно забрать $n - 1$ камень из выбранной в текущий ход кучки или же по 1 камню из всех $n - 1$ других кучек, то ход невозможен.

Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Кто выигрывает при правильной игре?

Решение

Ключевая идея решения состоит в том, что игра становится детерминированной, как только появляется кучка размера $n - 2$.

Случай, когда $n = 1$ очевиден. Далее будем считать, что $n > 1$.

Рассмотрим случай, когда n – чётное. Опишем выигрышную стратегию для второго игрока.

Если на первом ходу Петя забирает камни не из первой кучки, то Вася может просто повторять ход за ним. Он сможет так сделать, так как после хода Пети в этом случае всегда будет нечётное количество камней в первой кучке.

Если же на первом ходу Петя забирает камни из первой кучки, то опять-таки Вася может просто повторить ход за ним. Очевидно, что как только Петя заберёт камни не из первой кучки, то повторится процесс, описанный выше и Петя проиграет. Иначе после n таких ходов, появится ещё одна кучка, размера n. Так как n чётное, то произойдёт это как раз перд ходом Пети.

Если n нечётное, то первым ходом Петя может забрать камни из второй кучки.

Тогда если Вася забирает камни не из первой кучки, то мы повторяем ход за ним. После этого в первой кучке остаётся чётное количество камней – $n - 3$. Далее Петя может всегда повторять ход за Васей (это тоже нужно доказать), а так как количество камней в первой кучки с каждым ходом уменьшается на один, то Петя выиграет.
Если своим ходом Вася забирает камни из первой кучки, то тогда мы оказываемся в ситуации, когда в первых двух кучках лежат $n - 1$ и $2n - 1$ камней соответственно. Тогда Петя может забрать камни из первой кучки. Заметим, что рассуждения про ход Васи остаются аналогичными, то есть при отнимании камней не из первой кучки он проигрывает. В противном же случае Петя просто повторяет ход за ним. Именно после хода Пети в кучках окажется $n - 1$ и $n - 1$ камней соответственно. Очевидно, что в этом случае Вася проигрывает.

Задача 3

Перестановкой чисел от 1 до n будем называть упорядоченное множество из n элементов, в котором каждое из чисел от 1 до n встречается ровно один раз. Индексацию элементов перестановки будем начинать с 1.
Назовём перестановку P *интересной*, если для неё существует два таких индекса её элементов $i_{first} < i_{second}$, что одновременно выполняются три условия

- Для $1 \leq i < i_{first}$ верно, что $P_i < P_{i+1}$
- Для $i_{first} \leq i < i_{second}$ верно, что $P_i > P_{i+1}$
- Для $i_{second} \leq i < n$ верно, что $P_i < P_{i+1}$

Найдите количество *интересных* перестановок чисел от 1 до n.

Решение

Научимся для начала решать более простую задачу. Найдём количество перестановок длины k, таких, что их монотонность меняется не более одного раза. Рассмотрим случай, когда изначально перестановка возрастает (случай с убывающей перестановкой рассматривается аналогично).
Можно показать, что существует биекция между такими перестановками и разбиениями $k - 1$ элементов на два множества. Действительно, единственным “переломным” элементом такой перестановки может быть число k, а остальные разбиваются на две группы: слева от него и справа.

Теперь мы можем воспользоваться этим результатом для исходной задачи: для каждого k выберем элементы, которые будут образовывать префикс последовательности до i_{first} включительно, а из оставшихся элементов нам нужно сформировать последовательность из упрощенной задачи.
В замкнутый вид формула сворачивается с помощью приведения её к виду бинома Ньютона. Также нужно аккуратно рассмотреть граничные случаи.

10 класс

Задача 1

Миша живет за городом и каждый раз, когда он собирается в гости к своим друзьям, которые живут в городе, ему предстоит непростое путешествие.

От дома Миши в город ведет трасса длины 8192 метров, для простоты будем считать ее прямой. Также на трассе есть несколько автобусных остановок, первая из которых находится рядом с домом Миши, будем считать, что до нее расстояние 1 метр. Так получилось, что остановка с номером i (при $i > 1$) удалена от дома Миши на $1 + 3 \cdot i$ метров.

Больше, чем ходить пешком, Миша любит для текущей своей позиции считать сумму кратчайших расстояний до всех остановок, назовем эту величину крутостью.
Мы же попросим вас сделать чуть больше, посчитайте суммарную крутость по всем целым координатам Миши на трассе.

Решение

Давайте разобьем суммарную крутость на следующий слагаемые:

- Суммарная крутость по всем целым координатам, которые делятся на 3
- Суммарная крутость по всем целым, координатам, которые дают остаток 1 при делении на 3
- Суммарная крутость по всем целым координатам, которые дают остаток 2 при делении на 3

Очевидно, что ответом на задачу будет сумма трех описанных выше величин. В рамках разбора покажем, как считать вторую из них, остальные считаются схожим образом.

Давайте для простоты будем считать, что длина трассы 8191 метр, также пока не будем учитывать точку 0, значения для данных величин можно вычислить вручную и позже добавить к ответу.

Давайте научимся считать суммарную крутость, но только до остановок с меньшими координатами, чтобы получить суммарную крутость для всех остановок домножим ответ на два в силу симметрии.

Пусть $f(i)$ – количество остановок с координатами меньше, чем у $1 + 3 \cdot i$, тогда $f(i) = \frac{1 + 3 \cdot i - 1}{3} = i$, заметим, что расстояния до автобусных остановок образуют арифметическую прогрессию с шагом 3, при этом количество членов этой прогрессии равняется $f(i)$.

Тогда по формуле о сумме арифметической прогрессии получаем, что от фиксированной точки $1 + 3 \cdot i$ расстояния до всех автобусных остановок вычисляется по формуле $i \cdot \frac{3 + 3 \cdot i}{2} = \frac{3 \cdot i \cdot (i+1)}{2}$, пусть n – количество автобусных остановок (в рамках задачи это число получается равным 2730), тогда нужно посчитать значение следующего выражения $\frac{3 \cdot 2}{2} + \frac{3 \cdot 2 \cdot 3}{2} + \ldots + \frac{3 \cdot i \cdot (i+1)}{2} + \ldots + \frac{3 \cdot 2730 \cdot 2731}{2} = \frac{3}{2}(1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + 2730 \cdot 2731)$

Можно показать, что значение выражения в скобочках равняется $\frac{2730 \cdot 2731 \cdot 2732}{3}$, таким образом ответ для остатка 1 равняется $2730 \cdot 2731 \cdot 2732$, так как мы еще домножили на 2. Также надо не забыть учесть выкинутые точки.

Аналогичным образом вычислялась суммарная крутость и по другим точкам, с той лишь разницей, что менялись первые члены арифметических прогрессий.

Задача 2

Перестановкой чисел от 1 до n будем называть упорядоченное множество из n элементов, в котором каждое из чисел от 1 до n встречается ровно один раз. Индексацию элементов перестановки будем начинать с 1.

Назовём перестановку P *интересной*, если для неё существует два таких индекса её элементов $i_{first} < i_{second}$, что одновременно выполняются три условия

- Для $1 \le i < i_{first}$ верно, что $P_i < P_{i+1}$
- Для $i_{first} \le i < i_{second}$ верно, что $P_i > P_{i+1}$
- Для $i_{second} \le i < n$ верно, что $P_i < P_{i+1}$

Найдите количество *интересных* перестановок чисел от 1 до n.

Решение

Научимся для начала решать более простую задачу. Найдём количество перестановок длины k, таких, что их монотонность меняется не более одного раза. Рассмотрим случай, когда изначально перестановка возрастает (случай с убывающей перестановкой рассматривается аналогично).

Можно показать, что существует биекция между такими перестановками и разбиениями $k-1$ элементов на два множества. Действительно, единственным “переломным” элементом такой перестановки может быть число k, а остальные разбиваются на две группы: слева от него и справа.

Теперь мы можем воспользоваться этим результатом для исходной задачи: для каждого k выберем элементы, которые будут образовывать префикс последовательности до i_{first} включительно, а из оставшихся элементов нам нужно сформировать последовательность из упрощенной задачи.

В замкнутый вид формула сворачивается с помощью приведения её к виду бинома Ньютона. Также нужно аккуратно рассмотреть граничные случаи.

Задача 3

Обозначим за $f(n)$ функцию, которая равна количеству натуральных чисел меньших n взаимно простых с ним.

Обозначим за $f_k(n)$ функцию, которая при $k = 1$ равна $f(n)$, а иначе $f_k(n) = f_{k-1}(n)$.

За $f^*(n)$ обозначим функцию, равную первому значению k при таком n, что $f_k(n) = 0$.

Покажите, что для любого натурального X найдётся такое N_X, что для любого $n > N_X$ верно, что $f^*(n) > X$.

Решение

В данной задаче была опечатка. Жюри оценивало отдельные идеи участников, в том числе указания на некорректность условий.

В оригинальной версии задачи $f_k(n) = f(f_{k-1}(n))$.

Основная идея решения заключалась в том, чтобы показать, что $f(n)$ ограничена снизу какой-нибудь функцией от n (например $f(n) > \frac{\sqrt{n}}{2}$) и заметить, что значение $f^*(n) = f^*(f(n)) + 1$. Дальнейшее доказательство мы оставим вам в качестве упражнения.

11 класс

Задача 1

Миша живет за городом и каждый раз, когда он собирается в гости к своим друзьям, которые живут в городе, ему предстоит непростое путешествие.

От дома Миши в город ведет трасса длины 8192 метров, для простоты будем считать ее прямой. Также на трассе есть несколько автобусных остановок, первая из которых находится рядом с домом Миши, будем считать, что до нее расстояние 1 метр. Так получилось, что остановка с номером i (при $i > 1$) удалена от дома Миши на $1 + 3 \cdot i$ метров.

Больше, чем ходить пешком, Миша любит для текущей своей позиции считать сумму кратчайших расстояний до всех остановок, назовем эту величину крутостью.
Мы же попросим вас сделать чуть больше, посчитайте суммарную крутость по всем целым координатам Миши на трассе.

Решение

Давайте разобьем суммарную крутость на следующий слагаемые:

- Суммарная крутость по всем целым координатам, которые делятся на 3
- Суммарная крутость по всем целым, координатам, которые дают остаток 1 при делении на 3
- Суммарная крутость по всем целым координатам, которые дают остаток 2 при делении на 3

Очевидно, что ответом на задачу будет сумма трех описанных выше величин. В рамках разбора покажем, как считать вторую из них, остальные считаются схожим образом.

Давайте для простоты будем считать, что длина трассы 8191 метр, также пока не будем учитывать точку 0, значения для данных величин можно вычислить вручную и позже добавить к ответу.

Давайте научимся считать суммарную крутость, но только до остановок с меньшими координатами, чтобы получить суммарную крутость для всех остановок домножим ответ на два в силу симметрии.

Пусть $f(i)$ – количество остановок с координатами меньше, чем у $1 + 3 \cdot i$, тогда $f(i) = \frac{1 + 3 \cdot i - 1}{3} = i$, заметим, что расстояния до автобусных остановок образуют арифметическую прогрессию с шагом 3, при этом количество членов этой прогрессии равняется $f(i)$.

Тогда по формуле о сумме арифметической прогрессии получаем, что от фиксированной точки $1 + 3 \cdot i$ расстояния до всех автобусных остановок вычисляется по формуле $i \cdot \frac{3 + 3 \cdot i}{2} = \frac{3 \cdot i \cdot (i + 1)}{2}$, пусть n – количество автобусных остановок (в рамках задачи это число получается равным 2730), тогда нужно посчитать значение следующего выражения $\frac{3 \cdot 2}{2} + \frac{3 \cdot 2 \cdot 3}{2} + \ldots + \frac{3 \cdot i \cdot (i+1)}{2} + \ldots + \frac{3 \cdot 2730 \cdot 2731}{2} = \frac{3}{2}(1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + 2730 \cdot 2731)$

Можно показать, что значение выражения в скобочках равняется $\frac{2730 \cdot 2731 \cdot 2732}{3}$, таким образом ответ для остатка 1 равняется $2730 \cdot 2731 \cdot 2732$, так как мы еще домножили на 2. Также надо не забыть учесть выкинутые точки.

Аналогичным образом вычислялась суммарная крутость и по другим точкам, с той лишь разницей, что менялись первые члены арифметических прогрессий.

Задача 2
Обозначим за $f(n)$ функцию, которая равна количеству натуральных чисел меньших n взаимно простых с ним.
Обозначим за $f_k(n)$ функцию, которая при $k = 1$ равна $f(n)$, а иначе $f_k(n) = f(f_{k-1}(n))$.
За $f^*(n)$ обозначим функцию, равную первому значению k при таком n, что $f_k(n) = 0$.
Покажите, что для любого натурального X найдётся такое N_X, что для любого $n > N_X$ верно, что $f^*(n) > X$.

Решение
Основная идея решения в том, чтобы показать, что $f(n)$ ограничена снизу какой-нибудь функцией от n (например $f(n) > \frac{\sqrt{n}}{2}$) и заметить, что значение $f^*(n) = f^*(f(n)) + 1$.

Задача 3
Одним музыкальным сервисом пользуется n человек. Всего в этом сервисе есть m различных песен.

У каждого пользователя есть плейлист с понравившимися ему песнями.
Каждый пользователь может зайти в плейлист к другому пользователю. Назовем такой процесс *ознакомлением*. Все пользователи считают себя настоящими ценителями музыки, поэтому если во время такого *ознакомления* с другим плейлистом они видят, что какая-то песня, которая нравится им, встречается в плейлисте у другого пользователя, то она перестает им нравится. Но при этом им начинают нравится песни, которые не нравились им, но нравились человеку, плейлист которого они сейчас смотрят.

Назовем *похожестью* двух пользователей количество совпадающих песен в их плейлистах. Какая максимальная *похожесть* по всем парам людей может быть достигнута после произвольного количества таких *ознакомлений*?

Решение
Составим таблицу, каждая строка которой соответствует какому-то пользователю, а каждый столбец песне. На пересечении строки i и столбца j поставим 1 тогда и только тогда, когда пользователю i нравится песня с номером j.
Заметим, что тогда операция *ознакомления* пользователя a с плейлистом пользователя b – это присвоение строке пользователя a поэлементного xor со строкой b.

Воспользуемся методом Гаусса для приведения матрицы к ступенчатому виду для нашей исходной матрицы. Вы можете ознакомиться с ним вне этого разбора, но в рамках решения требовалось каким-то образом описать этот метод.

Если в ступенчатом виде есть хотя бы одна строка, которая полностью состоит из нулей, то тогда мы можем получить похожесть, равную количеству песен, которые нравятся хотя бы одному человеку. Это простое упражнение мы оставим вам для самостоятельного разбора.

Этого было достаточно для получения полного балла по задаче.
Рассмотрение случая, когда в матрице не остаётся строк из нулей не оценивалось.