8 класс

1. На вывеске магазина красовалась надпись «Всё по 99», говорящая о том, что в данном магазине каждый товар стоит 99 рублей. В один из дней две девятки на вывеске магазина отвалились. Бригада рабочих, восстанавливающих вывеску, не знала, какими были отпавшие цифры – девятками или шестёрками, а поэтому установили на вывеске неверное двузначное число. Хозяин магазина заметил, что если теперь изменить стоимость всех товаров на новую, указанную на вывеске, суммарная стоимость всего ассортимента снизится на 2025 рублей. Сколько всего товаров в ассортименте магазина? (20 баллов)

   Решение: Пусть в ассортименте магазина x товаров. Число на новой вывеске могло принимать одно из значений $66, 69, 96$ и суммарная стоимость товаров в таком случае уменьшилась бы в рублях на $33x, 30x, 3x$ соответственно. Из всех этих чисел только 3 является делителем 2025, значит $2025 = 3x, x = 675$.

   Ответ: 675

2. В шахматном турнире, состоящем из нескольких туров, приняли участие 6 шахматистов. Перед каждым туром всех игроков случайным образом делят на 3 пары, определяя тем самым каждому из шахматистов его противника в этом туре. При этом шахматисты, уже сыгравшие друг с другом ранее, обязательно распределяются в разные пары. Может ли случиться так, что после проведённых 3 туров будет невозможным провести четвёртый? (20 баллов)

   Решение: Пусть первые три тура были сыграны следующим образом: в первом туре $1, 2, 3$ шахматисты сыграли с $4, 5, 6$ соответственно, во втором – $1, 2, 3$ сыграли с $5, 6, 4$, а в третьем – $1, 2, 3$ сыграли с $6, 4, 5$. В четвёртом туре $1, 2, 3$ шахматисты могут сыграть только друг с другом, значит кто-то из них останется без пары.

   Ответ: может

3. Дан квадрат размера $n \times n$. В каждую клетку квадрата записывают по одному натуральному числу от 1 до 100 (числа в клетках могут повторяться). Сколько существует расстановок чисел в клетки этого квадрата, таких, чтобы в каждом квадрате 2×2 сумма чисел делилась на 4? (20 баллов)

Решение: Заполним верхнюю строчку и левый столбец таблицы произвольными числами – это можно сделать 100^{2n-1} способами. Рассмотрим левый верхний квадрат 2×2. В нём уже заполнены три клетки, значит в оставшуюся можно поставить любое из 25 чисел с остатком, дополняющим всю сумму до кратной четырём. Продолжим рассуждения для вновь появляющихся квадратов с тремя заполненными клетками. В итоге получим 25 вариантов для каждой из оставшихся $n^2 - (2n-1) = (n-1)^2$ клеток, то есть всего $100^{2n-1} \cdot 25^{(n-1)^2}$ вариантов.

Ответ: $\mathbf{100^{2n-1} \cdot 25^{(n-1)^2}}$

4. Назовём натуральное число n *забавным*, если оно обладает следующими свойствами:
   1) в нём чётное количество цифр;
   2) если разбить его на два числа с одинаковым количеством цифр (первое число состоит из первой половины цифр, записанных в том же порядке, второе – аналогично, из последней половины цифр), причём оба этих числа не начинаются с нуля, то квадрат суммы этих чисел равен n.

   Например, число 2025 является забавным, так как $(20 + 25)^2 = 2025$.

   Докажите, что существует хотя бы миллион забавных чисел.

   Решение: Пусть $a = 25 \cdot 10^{2k-2} + 5 \cdot 10^{k-1}, b = 25 \cdot 10^{2k-2}$. Тогда $2k$-значное число $\overline{ab}$ является забавным. Действительно, с одной стороны

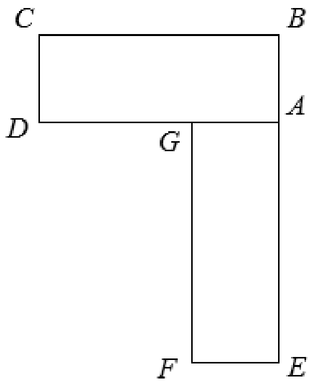
$$\overline{ab} = 10^{2k} \cdot a + b = 25 \cdot 10^{4k-2} + 5 \cdot 10^{3k-1} + 25 \cdot 10^{2k-2},$$

а с другой

$$(a+b)^2 = (50 \cdot 10^{2k-2} + 5 \cdot 10^{k-1})^2 = 2500 \cdot 10^{4k-4} + 500 \cdot 10^{3k-3} + 25 \cdot 10^{2k-2} =$$
$$= 25 \cdot 10^{4k-2} + 5 \cdot 10^{3k-1} + 25 \cdot 10^{2k-2}.$$

Число k может принимать любое натуральное значение, значит забавных чисел бесконечно много.

5. Два одинаковых прямоугольника $ABCD$ и $AEFG$ расположены так, как показано на рисунке. Точка M – середина отрезка BC. Прямая CG пересекает отрезок BE в точке K. Оказалось, что точки M, G, E лежат на одной прямой. В каком отношении точка K делит отрезок BE? (20 баллов)



Решение: Обозначим $x = AB, y = AE, z = AK$. Тогда $MC = MB = \frac{y}{2}, AG = x, KE = y - z$. Из подобия треугольников AGE и BME следует $\frac{BM}{AG} = \frac{BE}{AE}$, то есть $\frac{y}{2x} = \frac{y+x}{y}$, что равносильно $y^2 - 2xy - 2x^2 = 0$. Пусть $\frac{y}{x} = t > 0$, тогда, поделив обе части уравнения на x^2, получим $t^2 - 2t - 2 = 0, (t-1)^2 = 3, t = 1 \pm \sqrt{3}$, а поскольку $1 - \sqrt{3}$, то $t = 1 + \sqrt{3}$. Из подобия треугольников AGK и BCK следует $\frac{BC}{AG} = \frac{BK}{AK}$, то есть $\frac{y}{x} = \frac{z+x}{z}$, откуда $z = \frac{2x}{2x+y}$. Найдём отношение $EK : BK$:

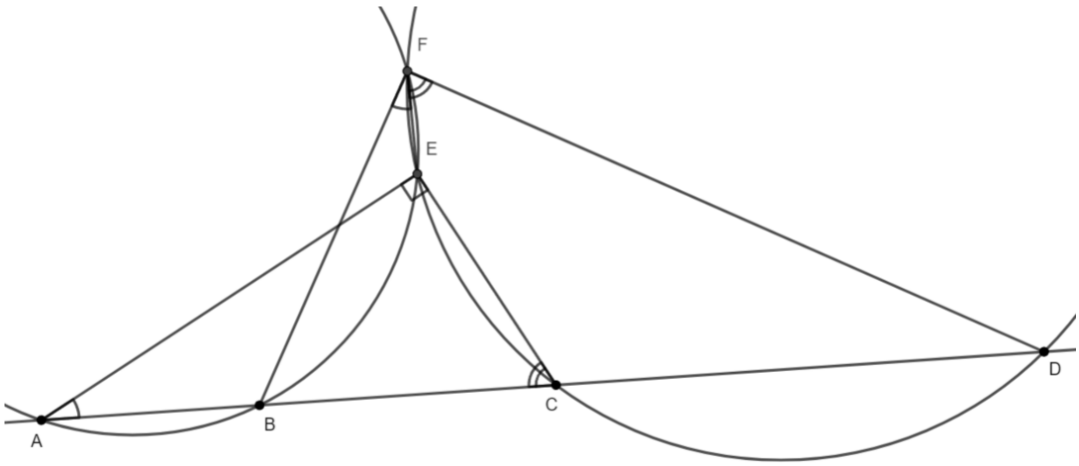
$$\frac{EK}{BK} = \frac{y-z}{z+x} = \frac{y - \frac{yx}{2x+y}}{\frac{yx}{2x+y} + x} = \frac{y^2 + xy}{2x^2 + 2xy} = \frac{y}{2x} = \frac{t}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $EK : BK = 1 + \sqrt{3} : 2$.

9 класс

1. На прямой отмечены точки A, B, C, D (именно в таком порядке). Окружность, проходящая через точки A и B, пересекает окружность, проходящую через точки C и D, в точках E и F. Оказалось, что $\angle AEC = 90°$. Докажите, что $\angle BFD = 90°$. (20 баллов)

   Решение: В треугольнике AEC сумма острых углов равна $90°$. Из вписанности $ABEF$ получаем $\angle BFE = \angle BAE$, а из вписанности $CEFD$ получаем $\angle EFD = \angle ECA$. Значит $\angle BFE = \angle BFE + \angle EFD = \angle BAE + \angle ECA = 90°$.



2. Существуют ли 2025 последовательных натуральных чисел, обладающих следующим свойством: все эти числа можно разделить на две группы таким образом, что десятичная запись суммы всех чисел первой группы состоит только из троек, а десятичная запись суммы всех чисел второй группы состоит только из четвёрок? (20 баллов)

   Решение: Сумма любых пять подряд идущих чисел делится на 5. Действительно,
   $$(x-2)+(x-1)+x+(x+1)+(x+2)=5x.$$
   Тогда сумма 2025 последовательных чисел оканчивается на 5 или на 0. Если бы мы смогли разбить числа на указанные группы, то сумма полученных чисел оканчивалась бы на 7 – противоречие.

   Ответ: не существуют

3. Про положительные числа a и b известно, что $a + \frac{a^2}{b} + \frac{a^2}{a+b} = 5$. Найти наименьшее возможное значение дроби $\frac{a+b}{a^2}$. (20 баллов)

Решение: Пусть $\frac{1}{a} = x, \frac{b}{a^2} = y$, тогда необходимо найти минимум $x + y$. Исходное равенство можно записать в виде

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{x+y} = 5.$$

Заметим, что $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$. Действительно, приведя к общему знаменателю, получим $(x+y)^2 \geq 4xy$, что равносильно $(x-y)^2 \geq 0$. Значит $5 \geq \frac{5}{x+y}$, то есть $x + y \geq 1$.

Равенство достигается при $a = b = 2$.

Ответ: 1

4. В шахматном турнире, состоящем из нескольких туров, приняли участие $2n$ шахматистов. Перед каждым туром всех игроков случайным образом делят на n пар, определяя тем самым каждому из шахматистов его противника в этом туре. При этом шахматисты, уже сыгравшие друг с другом ранее, обязательно распределяются в разные пары. Оказалось, что в турнире удалось провести 5 раундов, при этом невозможно провести 6 раунд с соблюдением правил турнира. Найдите все возможные значения n. (20 баллов)

Решение: Ясно, что $n = 3$ подходит, поскольку шахматисты не могли сыграть более 5 раз. При $n = 4$ такое могло случиться. Приведём пример. Пронумеруем шахматистов числами от 1 до 8 и составим таблицу первых пяти туров, где на пересечении номеров шахматистов будем указывать номер тура, в котором они играли. Заметим, что ещё не сыграли пары А – Б, Б – В, В – А. Если в 6 туре сыграют какие-то двое из них, то третьему будет не с кем играть.

	А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	З
А				1	2	3	4	5
Б				5	1	2	3	4
В				4	5	1	2	3
Г	1	5	4		3			2
Д	2	1	5	3		4		
Е	3	2	1		4		5	
Ж	4	3	2			5		1
З	5	4	3				1	

Рассмотрим $n = 5$. Пронумеруем шахматистов числами от 1 до 10 и разобьём их на группы $(1, 2, 3, 4, 5)$ и $(6, 7, 8, 9, 10)$. Пусть в первом туре сыграли пары $(1, 6), (2, 7), (3, 8), (4, 9), (5, 10)$, а следующие 4 тура будем сдвигать шахматистов второй группы в этих парах по циклу. Тогда каждый шахматист первой группы сыграет с каждым шахматистом второй группы. Заметим, что в следующих турах могут встретиться лишь шахматисты из одной группы, а поскольку размер групп нечётный, кому-то не достанется пары.

Докажем, что при $n \geq 6$ такой ситуации не могло возникнуть. Введём граф, в котором вершинами являются шахматисты, а рёбра между ними проводятся, если они ещё не играли. Тогда задача сводится к разбиению всех $2n$ вершин на n пар смежных. Пусть k – максимально возможное число выделенных пар, причём $k \leq n-1$. Назовём пары этих вершин (A_i, B_i), где $1 \leq i \leq k$ – номер пары. Рассмотрим оставшиеся $2n-2k \geq 2$ вершин. По предположению, никакие две из них не являются смежными. Выберем любые две из них – назовём их A и B, их степень равна $2n-6$, причём они могут быть соединены только с вершинами A_i, B_i. Суммарная их степень равна $2(2n-6) > 2k$, значит у A и B есть общая смежная вершина – пусть это A_k. Тогда если хоть одна из них смежна с B_k (например, B), то мы можем убрать пару (A_k, B_k) и сформировать две новые пары (A, A_k) и (B, B_k), что противоречит максимальности k. Значит ни A, ни B не смежны с B_k, и оставшиеся $2n-7$ рёбер могут идти только в пары (A_i, B_i), при $i \leq k-1$. Продолжая аналогичные рассуждения, мы либо получим ситуацию, в которой A и B обе смежны с вершиной A_i, а хотя бы одна из них – смежна с B_i, либо через $k-1$ таких действий у нас останутся нерассмотренными $2n-k-5 \geq 2$ рёбер для вершин A и B, два из которых обязаны соединять эти вершины и с A_1, и с B_1. То есть пока $k < n$, мы можем увеличивать число пар вплоть до n – полученные пары и будут распределением участников на 6 тур.

Замечание. Рассуждения для случая $n \geq 6$ можно было провести по-другому, воспользовавшись известным результатом теории графов.

Теорема Оре. Пусть в графе k вершин. Известно, что суммарная степень любых двух несмежных вершин не меньше k. Тогда в этом графе есть гамильтонов цикл (то есть цикл, проходящий по всем вершинам ровно один раз).

После пяти сыгранных туров в получившемся графе степень каждой из n вершин будет равна $2n-6$. Суммарная степень любых двух несмежных вершин равна $4n-12$, что не меньше $2n$ при $n \geq 6$. Тогда по теореме Оре в графе существует гамильтонов цикл. Возьмём этот цикл и покрасим все его $2n$ рёбер в два цвета, чередуя цвета. Это возможно, так как число рёбер чётно. Затем рассмотрим все рёбра одного цвета. Пары вершин, которые соединяют эти рёбра, можно взять в качестве пар для проведения 6 тура.

Ответ: 3, 4, 5

5. На шахматной доске 8×8 стоят короли. Два короля бьют друг друга, если стоят в клетках, соприкасающихся хотя бы по углу. Каждого короля спросили, сколько других королей находится под его боем. Ответы были следующие: «один король», «два короля», «три короля», …, «n королей». Оказалось, что все короли, стоящие на белых клетках доски, сказали правду, а все короли, стоящие на чёрных клетках, солгали. Найдите наибольшее возможное значение n. (20 баллов)

Решение: Назовём королей *белыми* и *чёрными*, если они стоят на белой или чёрной клетке соответственно. Ясно, что белые короли могли сказать, что бьют от 0 до 8 других королей, а чёрные короли могли сказать, в частности, что бьют более 8 королей. Королей, которые бьют n клеток, назовём «король-n». Покажем, что не существует расстановки, в которой белые короли бьют одновременно 7 и 8 королей. Поскольку они сказали правду, то «король-8» бьёт четырёх белых королей, а «король-7» хотя бы трёх. В какие бы две белые клетки мы ни поставили этих королей, они будут бить не более двух общих клеток, значит суммарно они бьют хотя бы 5 белых королей. Это означает, что один из белых королей которого бьёт либо «король-8», либо «король-7», бьёт не более двух других королей. Такой король не может бить «короля-8», поскольку тогда он будет бить ещё хотя бы двух королей, значит он бьёт «короля-7», и только одного из примыкающих чёрных королей.

3	к	4	к		к		к
к	7	к		к		к	
	к	6	к		к		к
к	5	к		к		к	
	к		к		к		к
к		к		к		к	
	к		к		к		к
к		к		к		к	2

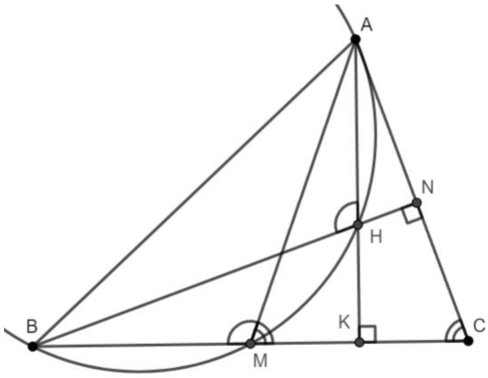
Но в таком случае «король-7» не бьёт какую-то из чёрных клеток, значит бьёт ещё одну белую, на которой может стоят только король, не бьющий никого, кроме «короля-7», то есть «король-7» не бьёт каких-то двух чёрных королей – противоречие. Также заметим, что если на доске есть «король-0» и «король-1», то суммарно к ним примыкают хотя бы четыре различные чёрные клетки. Это означает, что хотя бы в трёх каких-то чёрных клетках нет королей. В таком случае выгодней убрать «короля-0» и «короля-1», тем самым получив возможность заполнить эти три чёрные клетки. Если стоит только «король-1», его можно убрать и добавить одного из чёрных королей, тем самым хуже не станет. Если стоит только «король-0», очевидно, его выгодно убрать.

Приведём пример, в котором белые клетки заполнены королями от 2 до 7, и заполнены все чёрные клетки – всего 38 королей.

Ответ: 38

10 класс

1. В остроугольном треугольнике ABC отметил точку M – середину стороны BC, и точку H пересечения высот. Оказалось, что четырёхугольник $AHMB$ – вписанный. В каком отношении высота AH делит сторону BC? (20 баллов)



Решение: Пусть точки K и N – основания высот AH и BH соответственно. По сумме углов в четырёхугольнике $CNHK$ следует, что $\angle KHN = 180° - \angle ACB$. Из вписанности $AHMB$ следует, что $\angle BMA = \angle BHA = \angle KHN$, значит $\angle AMC = 180° - \angle BMA = \angle ACB$. Тогда треугольник ACM – равнобедренный и $MK = KC$, причём $MK + KC = BM$, значит CK составляет четверть от стороны BC и $BK : KC = 3 : 1$.

Ответ: 3:1

2. В шахматном турнире, состоящем из нескольких туров, приняли участие 8 шахматистов. Перед каждым туром всех игроков случайным образом делят на 4 пары, определяя тем самым каждому из шахматистов его противника в этом туре. При этом шахматисты, уже сыгравшие друг с другом ранее, обязательно распределяются в разные пары. Может ли случиться так, что после проведённых 5 туров будет невозможным провести шестой? (20 баллов)

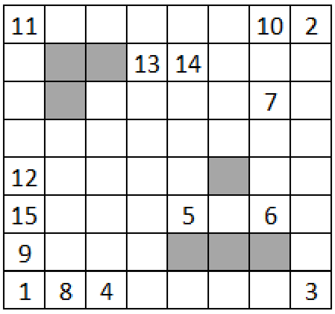
Решение: Пронумеруем шахматистов числами от 1 до 8 и составим таблицу первых пяти туров, где на пересечении номеров шахматистов будем указывать номер тура, в котором они играли. Заметим, что ещё не сыграли пары $\text{А} - \text{Б}, \text{Б} - \text{В}, \text{В} - \text{А}$. Если в 6 туре сыграют какие-то двое из них, то третьему будет не с кем играть.

	А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	З
А				1	2	3	4	5
Б				5	1	2	3	4
В				4	5	1	2	3
Г	1	5	4		3			2
Д	2	1	5	3		4		
Е	3	2	1		4		5	
Ж	4	3	2			5		1
З	5	4	3				1	

Ответ: может

3. Андрей выставил на пустую шахматную доску 8×8 ферзя и сделал им последовательно несколько ходов (по шахматным правилам), закрашивая в красный цвет те клетки, через которые прошёл ферзь (включая конечную и начальную). Для каждого хода Андрей вычислили расстояние между центрами начального и конечного положения ферзя и оказалось, что все эти расстояния различны. Какое наибольшее количество красных клеток может быть сейчас на доске? (20 баллов)

Решение: Если ход ферзя параллелен одной из сторон доски, то его длина может быть целым числом от 1 до 7, а если параллелен одной из диагоналей – его длина может принимать значения $\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, \ldots, 7\sqrt{2}$. Значит, включая стартовую клетку, мы можем посетить не более $1 + 2 \cdot (1 + 2 + \ldots + 7) = 57$ клеток. Приведём пример посещения ферзём 57 клеток.



Ответ: 57

4. Положительные числа a, b, c, d составляют в указанном порядке возрастающую арифметическую прогрессию, причём $a^2 + d^2 = b^3 + c^3$. Докажите, что $d < 3$. (20 баллов)

Решение: Введём обозначение $x = \frac{a+d}{2} = \frac{b+c}{2}, 2y = b - a = c - b = d - c$, тогда $a = x - 3y, b = x - y, c = x + y, d = x + 3y$. Учтём, что $x - 3y > 0$, и тогда $x + 3y < 2x$. Условие задачи запишем в виде $(x-3y)^2 + (x+3y)^2 = (x-y)^3 + (x+y)^3$, что после раскрытия скобок и приведения подобных примет вид

$$x^2 + 9y^2 = x^3 + 3xy^2 = x(x^2 + 3y^2).$$

Тогда $x = \frac{x^2+9y^2}{x^2+3y^2} = 1 + \frac{6y^2}{x^2+3y^2} < 1 + \frac{6y^2}{(3y)^2+3y^2} = \frac{3}{2}$. Отсюда $d = x + 3y < 2x < 3$.

5. Император планеты Кибертрон приказал создать календарь наподобие земного, то есть разбить год на месяцы так, чтобы один месяц содержал 28 дней, а все остальные – либо 30, либо 31. Кроме того, он пожелал, чтобы среди любых трёх последовательных месяцев был хотя бы один 31-дневный: «лишние» 31-е дни император планировал сделать

всепланетными праздниками, а праздников хотелось побольше. Однако Мудрейший математик Кибертрона установил, что приказ Императора выполнить невозможно. Каким наибольшим числом может быть количество дней в году на планете Кибертрон, если известно, что это число – целое? (20 баллов)

Решение: Пусть год на Кибертроне составляет N суток. Приказ Императора может быть выполнен тогда и только тогда, когда для некоторых целых неотрицательных m и k выполняется равенство $N = 28 + 30m + 31k$ и, кроме этого,

$$k \geq k + m + \frac{k+m+1}{3} \Leftrightarrow\ k \geq \frac{m+1}{2}.$$

Назовём натуральные N, представимые в указанном виде, *приемлемыми*, а выражение $28 + 30m + 31k$ *представлением* числа N и найдём все неприемлемые N (ответом будет наибольшее их этих чисел).

Лемма. Пусть число N приемлемо. Тогда можно считать, что в его представлении $28 + 30m + 31k$ число $0 \leq m \leq 30$. Кроме того, такое m (а значит и k) единственно.

Доказательство леммы. Пусть $N = 28 + 30m + 31k$, но $m \geq 31$. Тогда

$$N = 28 + 30(m-31) + 31(k+30).$$

При этом

$$k + 30 > k \geq \frac{m+1}{2} > \frac{m-31+1}{2},$$

то есть пара $m_1 = m - 31, k_1 = k + 30$ также является представлением числа N. Осуществляя эту операцию несколько раз, найдём требуемое представление. Чтобы показать его единственность, предположим противное, то есть, что

$$N = 28 + 30m_1 + 31k_1 = 28 + 30m_2 + 31k_2$$

для некоторых различных чисел $m_1, m_2 \leq 30$. Тогда

$$30(m_1 - m_2) = 31(k_2 - k_1),$$

что невозможно, так как правая часть этого равенства кратна 31, а левая – нет.

Перейдём к решению задачи. Все числа вида $31a + 28$ приемлемы ($m = 0, k = a$). Число вида $31a + 27 = 28 + 30 + 31(a-1)$ приемлемо если и только если

$$k = a - 1 \geq \frac{m+1}{2} = 1,$$

то есть при $a \geq 2$. Наибольшее неприемлемое число такого вида $31 \cdot 1 + 27 = 58$.

Аналогично, $N = 31a + 26 = 28 + 30 \cdot 2 + 31(a-2)$ приемлемо если и только если

$$k = a - 2 \geq \frac{m+1}{2} = \frac{3}{2},$$

то есть при $a \geq 3{,}5$. Наибольшее неприемлемое число такого вида $31 \cdot 3 + 26 = 119$.

В общем случае число $N = 28 + 31a - t$ $(0 \leq t \leq 30)$. Тогда $N = 28 + 30t + 31(a - t)$ и оно приемлемо тогда и только тогда, когда выполнено неравенство

$$a - t \geq \frac{t+1}{2} \Leftrightarrow a \geq 1{,}5t + 0{,}5.$$

Так как a – целое, получаем, что наибольшее неприемлемое число указанного вида достигается при $a = 1{,}5t$ в случае чётного t и при $a = 1{,}5t - 0{,}5$ в случае нечётного. Значение N в этих случаях равны соответственно $28 + 45{,}5t$ и $12{,}5 + 45{,}5t$.

Теперь ясно, что наибольшее неприемлемое число возникает при наибольшем значении t, то есть при $t = 30$. В этом случае $N = 28 + 45{,}5 \cdot 30 = 1393$.

Ответ: 1393

11 класс

1. Трёхзначное число состоит из цифр a, b, c и обладает следующими свойствами:
    1) цифра в разряде единиц равна последней цифре числа $a + b + c$;
    2) цифра в разряде десятков равна последней цифре числа $ab + bc + ca$;
    3) цифра в разряде сотен равна последней цифре числа abc.

   Найдите все такие числа. (20 баллов)

   Решение: Пусть число имеет вид $\overline{abc}$. Тогда $a \neq 0$ и $a + b + c$ оканчивается на c, значит $a + b = 10$. Число $ab + bc + ca = ab + c(a + b)$ оканчивается на ту же цифру, что и ab, и по условию задачи оканчивается на b, значит $ab - b = b(a - 1) \vdots 10$. Разберём случаи:

   1) Если $b = 0$, то $a = 10$, что невозможно.

   2) Если b – чётное, то $a - 1$ кратно 5, значит $a = 6, b = 4$. Число $6 \cdot 4 \cdot c = 24c$ оканчивается на 6, значит $c = 4$ или $c = 9$.

   3) Если $b = 5$, то $a = 5$ и число $5 \cdot 5 \cdot c = 25c$ оканчивается на 5 при любом нечётном c.

   4) Если b – любое другое нечётное число, то $a - 1 \vdots 10$, то есть $a = 1$. Тогда $b = 9$ и число $1 \cdot 9 \cdot c = 9c$ оканчивается на 1, откуда $c = 9$.

   Ответ: 199, 551, 553, 555, 557, 559, 644, 649

2. В шахматном турнире, состоящем из нескольких туров, приняли участие 8 шахматистов. Перед каждым туром всех игроков случайным образом делят на 4 пары, определяя тем самым каждому из шахматистов его противника в этом туре. При этом шахматисты, уже сыгравшие друг с другом ранее, обязательно распределяются в разные пары. Может ли случиться так, что после проведённых 5 туров будет невозможным провести шестой? (20 баллов)

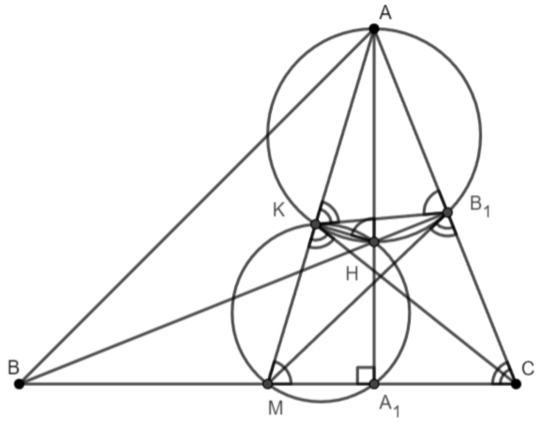
   Решение: Пронумеруем шахматистов числами от 1 до 8 и составим таблицу первых пяти туров, где на пересечении номеров шахматистов будем указывать номер тура, в котором они играли. Заметим, что ещё не сыграли пары А − Б, Б − В, В − А. Если в 6 туре сыграют какие-то двое из них, то третьему будет не с кем играть.

	А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	З
А				1	2	3	4	5
Б				5	1	2	3	4
В				4	5	1	2	3
Г	1	5	4		3			2
Д	2	1	5	3		4		
Е	3	2	1		4		5	
Ж	4	3	2			5		1
З	5	4	3				1	

   Ответ: может

3. Высоты AA_1 и BB_1 остроугольного неравнобедренного треугольника ABC пересекаются в точке H. Точка M – середина стороны BC. Описанная окружность треугольника A_1MH пересекает отрезок AM в точке K. Докажите, что KH – биссектриса угла CKB_1. (20 баллов)

Решение: Поймём из вписанности A_1MKH, что $\angle HKM = \angle HKA = 90°$, поэтому достаточно доказать, что $\angle MKC = \angle AKB_1$. Поскольку $\angle BB_1C = 90°$, то AB_1HK – вписанный. Тогда $\angle AB_1K = \angle AHK = 180° - \angle KHA_1 = \angle KMA_1$, что означает вписанность MKB_1C. Из этого же следует $\angle AKB_1 = \angle ACM$ и $\angle MKC = \angle MB_1C$. Отрезок MB_1 – медиана прямоугольного треугольника BB_1C, значит $\angle MCB_1 = \angle MB_1C$, а из полученного ранее $\angle MKC = \angle MCB_1 = \angle AKB_1$, что и требовалось доказать.



Замечание. Точка K по построению является проекцией ортоцентра H на медиану AM. Такая точка называется *точкой Шалтая* для вершины A. Одно из свойств этой точки гласит, что четырёхугольник $BKHC$ является вписанным, откуда немедленно получаем $\angle CBH = \angle CKH$. Равенство $\angle CBH = \angle HAB_1$ следует из подобия треугольников BHA_1 и HAB_1, а равенство $\angle HAB_1 = \angle HKB_1$ – из вписанности AB_1HK. Таким образом равенство $\angle CKH = \angle HKB_1$ доказано.

4. Найдите все тройки натуральных чисел x, y, z, являющиеся решением уравнения

$$2^{xy} \cdot z = 2^{x+y}(x + y + z). \text{ (20 баллов)}$$

Решение: Поскольку $z < x + y + z$, то $2^{xy} > 2^{x+y}$, значит $x, y \neq 1$. Без ограничения общности, пусть $x \leq y$. Выразим из уравнения $z = \frac{x+y}{2^{xy-x-y}-1}$.

Если $x = 2$, то $z = \frac{2+y}{2^{y-2}-1}$. Если $y = 3$, то $z = 5$; если $y = 4$, то $z = 2$; если $y = 5$, то $z = 1$.

При дальнейшем увеличении y на единицу, числитель дроби увеличивается на 1, а знаменатель – хотя бы на 8, а значит при $y \geq 6$, $z < 1$.

Если $x = 3$ и $y = 3$, то $z = \frac{6}{7}$, что не подходит.

Если $x \geq 3$ и $y > 3$, то

$$z = \frac{x+y}{2^{xy-x-y} - 1} \leq \frac{2y}{2^{xy-x-y-1}} = \frac{2y}{2^{x(y-1)-y-1}} \leq \frac{2y}{2^{2y-4}} = \frac{y}{2^{2y-5}}.$$

Докажем, что $2^{2y-5} > y$ при $y > 3$. При $y = 4$ неравенство верно, а при увеличении y на единицу, правая часть растёт на 1, а левая – хотя бы на 8. Доказанное неравенство влечёт то, что $z < 1$.

Ответ: (2, 3, 5), (2, 4, 2), (2, 5, 1), (3, 2, 5), (4, 2, 2), (5, 2, 1)

5. Есть доска размера $n \times n$, разделённая на единичные квадраты. Витя хочет выбрать n из этих единичных квадратов со следующим свойством: никакие два квадрата не находятся в одной строке или в одном столбце, и ни у каких четырёх выбранных квадратов центры не лежат на одной прямой. Докажите, что Витя сможет осуществить свою задумку при любом натуральном n. (20 баллов)

Решение: Будем говорить, что четвёрка клеток *портит* набор из n клеток, а саму четвёрку клеток – *испорченной*, если эти четыре клетки есть среди выбранных n клеток, и центры этих четырёх клеток лежат на одной прямой. Количество наборов из n клеток, никакие две из которых не лежат в одном столбце или в одной строке, равно $n!$. Всего испорченных четвёрок не больше количества прямых, проходящих через центры каких-то двух клеток, не лежащих в одной строке или в одном столбце, то есть не больше $\frac{n^2(n-1)^2}{2}$, а каждая испорченная четвёрка портит $(n-4)!$ наборов из n клеток. Предположим, что при каком-то n Вите не удастся совершить свою задумку. Это означает, что в каждом наборе из n клеток есть хотя бы одна испорченная четвёрка, то есть справедливо неравенство

$$n! \leq (n-4)! \cdot \frac{n^2(n-1)^2}{2},$$

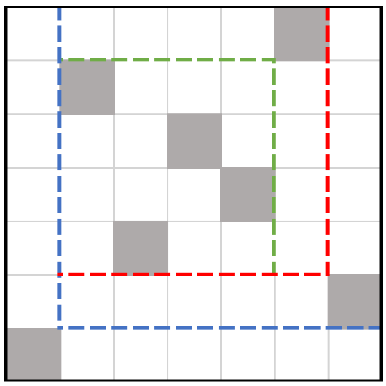
$$2n(n-1)(n-2)(n-3) \leq n^2(n-1)^2,$$

$$2(n-2)(n-3) \leq n(n-1),$$

$$n^2 - 9n + 12 \leq 0,$$

что неверно при $n \geq 8$, значит наше предположение ошибочно, и Витя сможет осуществить свою задумку.

Покажем, что при $n \leq 7$ Витя тоже справится. На рисунке выделены квадраты со сторонами $4, 5, 6, 7$, в которых никакая из четвёрок отмеченных клеток не является испорченной.



Изумруд 2024/2025 уч. год

Математика

Критерии проверки работ 1 варианта

8 класс

Задача 1

Полное решение	20 баллов
Арифметическая ошибка при делении 2025 на 3	18 баллов
Не разобран случай, когда новая вывеска "66", однако из решения ясно, что он разбирается аналогично остальным случаям	10 баллов

Задача 2

Верный пример с проверкой	20 баллов
Верный пример без обоснования его правильности	12 баллов
Неверный пример	0 баллов

Задача 3

Верное решение	20 баллов
В следствие логической ошибки получен ответ $100^{2n} \cdot 25^{n^2-2n}$	12 баллов
Доказано, что из заполнения $2n-1$ клеток таблицы следует однозначное заполнение всех остальных	7 баллов
Присутствует идея нахождения клеток таблицы, заполнение которых влечёт однозначное заполнение клеток всей таблицы. Однако таких клеток больше $2n-1$	5 баллов

Задача 4

Верный пример более миллиона подходящих чисел	20 баллов
Неверный пример более миллиона подходящих чисел	0 баллов

Задача 5

Верное решение	20 баллов
Рассмотрена одна пара подобных треугольников из решения, выведено верное соотношение сторон	5 баллов

9 класс

Задача 1

Верное решение	20 баллов
Неверное решение или его отсутствие	0 баллов

Задача 2

Верное решение	20 баллов
Замечено, но не доказано, что сумма последовательных 2025 чисел делится на 5 и получено противоречие с тем, что сумма оканчивается на 7	5 баллов
Доказано, что сумма 2025 последовательных чисел делится на 5	3 балла

Задача 3

Верное решение	20 баллов
Доказано, что указанная дробь не меньше 1, но не приведён пример достижения равенства	15 баллов

Задача 4

Верное решение	20 баллов
Доказано, что $n = 3, 4, 5$ подходит. При доказательстве того, что n не равно 6, применена теорема Оре, не обобщённая на случай $n > 6$	15 баллов
Доказано, что $n = 3$ подходит	3 балла

Задача 5

Верное решение	20 баллов
Пример на 38 королей	7 баллов
Неверная оценка и пример	0 баллов

10 класс

Задача 1

Верное решение	20 баллов
Доказано, что треугольник HMC – равнобедренный. Дальнейших продвижений нет	10 баллов

Задача 2

Верный пример с проверкой	20 баллов
Построен верный пример без обоснования его правильности	12 баллов
Неверный пример	0 баллов

Задача 3

Доказано, что красных клеток не больше 57	5 баллов
Доказано, что ферзь не может сделать больше 14 ходов. Количество красных клеток не посчитано	3 балла

Задача 4

Верное решение	20 баллов
Неверное решение или его отсутствие	0 баллов

Задача 5

Верное решение	20 баллов
Задача решена верно в предположении, что количество месяцев дает остаток 1 при делении на 3	17 баллов
Неаккуратная работа с целой частью привела к ответу 1362 дня или к необоснованному ответу 1393 дня	15 баллов
Доказано, что если число N приемлемо, то для него существует календарь, в котором 30-дневных месяцев не более тридцати	5 баллов
Верный пример календаря на 1393 дня	3 балла
Неверное решение или решение в предположении, что в календаре 12 месяцев	0 балла

11 класс

Задача 1

Верное решение	20 баллов
При полном переборе утеряны часть чисел одной из групп (a,b): {(4,6), (5,5), (1,9)}	18 баллов
Найдены все числа, кроме обозначенного случая a=6, b=4	18 баллов
Найдены все числа, кроме потерянного случая a=6, b=4	12 баллов
Доказано, что множество пар (a,b) это {(4,6), (5,5), (1,9)}, причём целиком найдены числа одной из групп	10 баллов
Присутствует структура перебора чисел abc, где a+b=10, но более чем в одной группе найдены не все подходящие числа	10 баллов
Доказано, что множество пар (a,b) это {(4,6), (5,5), (1,9)}	4 балла
Получено неверно условие, что произведение bc оканчивается на 1, в следствие чего получен только ответ 199	3 балла
Доказано, что a+b=10 и найдены все числа 551, 553, 555, 557, 559 при разборе случая a=5, b=5	3 балла
Доказано, что a+b=10. Дальнейших продвижений нет	0 баллов

Задача 2

Верный пример	20 баллов
Построен пример с тремя попарно не сыгравшими шахматистами, но они не указаны	15 баллов
Построен верный пример без обоснования его правильности	12 баллов
Неверный пример	0 баллов

Задача 3

Верное решение	20 баллов
При доказательстве вписанности CB_1KM допущена ошибка в равенстве $AH \cdot AA_1 = AC \cdot AB_1$	15 баллов
Отсутствует доказательство вписанности CB_1KM, с которым решение становится полным	10 баллов
Доказана вписанность CB_1KM	10 баллов

Задача 4

Верное решение	20 баллов
Доказано, что наибольшая из переменных x, y не больше 5. Получение всех троек не обосновано	17 баллов
В верном решении есть необоснованные оценки вида $xy - x - y \geq const$	15 баллов
При полном переборе случаев упорядочивания x, y, z потеряны тройки решений	10 баллов
В решении отсутствует доказательство неравенства $(3x)^y \geq (x + y + 1)6x$	10 баллов
В решении присутствуют необоснованные оценки на произведение xy при фиксированной сумме $x + y$ или наоборот	10 баллов
Найдены все тройки решений с проверкой, начальное уравнение преобразовано к одному из видов $2^{xy-x-y} = \frac{x+y+z}{z}$ или $z = \frac{x+y}{2^{xy-x-y}-1}$ и исследуется рост левой и правой части	5 баллов
Найдены все тройки решений с проверкой и начальное уравнение преобразовано к одному из видов $2^{xy-x-y} = \frac{x+y+z}{z}$ или $z = \frac{x+y}{2^{xy-x-y}-1}$	3 баллов
Неверное решение	0 баллов

Задача 5

Верное решение	20 баллов
Любое конечное число примеров выбора клеток без обоснования правильности	0 баллов