Время выполнения задания – 180 минут. Максимальное количество баллов – 100

Задание 1. (25 баллов) **Плавление метеорита**

Рассмотрим упрощенную модель плавления метеорита, летящего сквозь земную атмосферу, согласно которой его внешние слои разогреваются до температуры плавления, плавятся, а затем сдуваются потоком воздуха. Будем считать, что внутренняя область метеорита остаётся холодной (имеет температуру, равную 270 K), пока не оказывается в прямом контакте с атмосферой. Пусть разогрев некоторого метеорита происходит только за счет его кинетической энергии, которая пропорциональна исходной массе. Когда эта энергия будет израсходована, данный метеорит потеряет 90 % своей массы, если его разогрев и плавление будут соответствовать модели, описанной выше. Альтернативная модель может состоять в том, что весь метеорит сначала прогревается до температуры плавления (1800 K), а затем плавится до тех пор, пока не будет израсходована вся кинетическая энергия. Расплавленные слои уносятся потоком воздуха, аналогично первой модели. Какую часть массы потеряет тот же самый метеорит при плавлении, описываемом второй моделью? Теплоемкость метеорита принять равной 600 Дж/кг·K, удельную теплоту плавления – равной 280 кДж/кг.

Решение

Пусть ν^2 – начальная скорость метеорита, связанная с кинетической энергией и массой соотношением

$$E_{кин} = m\upsilon^2/2.$$

Обозначим через Δm_1 массу, которую метеорит потеряет, если будет плавиться согласно первой модели. В этом случае, вся кинетическая энергия пойдёт на нагрев и плавление именно этой массы, так что

$$m\upsilon^2/2 = \Delta m_1 \cdot \left(c \cdot \Delta T + \lambda\right),$$

где c = 600 Дж/кг – удельная теплоемкость метеорита, ΔT = 1800-270 = 1530 K – изменение температуры его расплавившихся слоев. Соответственно,

$$\frac{\upsilon^2}{2} = \frac{\Delta m_1}{m} \cdot \left(c \cdot \Delta T + \lambda\right) = \left(90\,\%\right) \cdot \left(c \cdot \Delta T + \lambda\right) = 0.9 \cdot \left(c \cdot \Delta T + \lambda\right) = 1078200 \text{ Дж/кг}.$$

Пусть Δm_2 – масса, которую метеорит теряет в рамках второй модели плавления. Здесь, до температуры плавления разогревается вся масса метеорита, расплавлена же будет только масса Δm_2:

$$m\upsilon^2/2 = m \cdot c \cdot \Delta T + \lambda \cdot \Delta m_2.$$

Теперь,

$$\frac{\upsilon^2}{2} = c \cdot \Delta T + \lambda \cdot \frac{\Delta m_2}{m} = 0.9 \cdot \left(c \cdot \Delta T + \lambda\right) \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta m_2}{m} = \frac{0.9 \cdot \left(c \cdot \Delta T + \lambda\right) - c \cdot \Delta T}{\lambda} = 0.9 - 0.1 \cdot \frac{c \cdot \Delta T}{\lambda} = 0.572 = 57.2\,\%.$$

Ответ: при плавлении по второй модели метеорит потеряет 57.2 % массы.

Рекомендуемые баллы:

За понимание связи между кинетической энергией и массой метеорита – **до 4 баллов**

За правильное использование теплоемкости – **до 4 баллов**

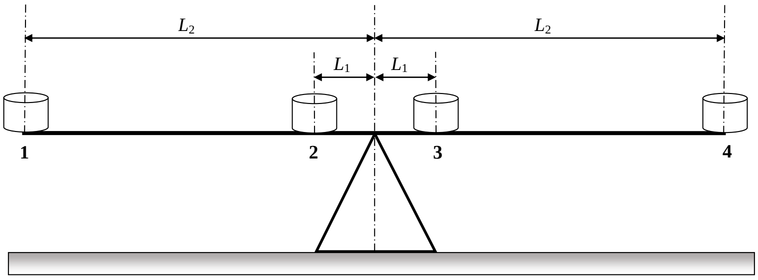
За правильное использование удельной теплоты плавления – **до 4 баллов**

За правильное применение первой модели плавления метеорита - **до 6 баллов**.

За правильное применение второй модели плавления метеорита - **до 6 баллов**.

За правильный численный ответ - **до 1 балла**.

Задание 2. (25 баллов) **Космические весы**



Представитель чрезвычайно технологичной цивилизации построил рычажные весы, показанные на Рисунке. В чашу № 1 он поместил чайную ложку вещества нейтронной звезды, масса которой равна 1 миллиарду тонн. Чаша № 2 оставлена свободной, тогда как в чаше № 3 находится чайная ложка с веществом из черной дыры с массой, равной 3 миллиардам тонн. Для того, чтобы сбалансировать весы, в чаше 4 размещена такая масса m, что произведение $m \cdot L_2$ равно $5 \cdot 10^{12}$ кг·м. Весы остаются сбалансированными, если ложку из чаши № 3 переместить в чашу № 2, а ложку из чаши № 1 – в чашу № 3. Найти длины L_1, L_2.

Решение

Для того, чтобы весы находились в равновесии, необходимо равенство суммы произведений масс каждой из чаш на расстояния до них от точки, где закреплен рычаг. Если измерять массы в миллиардах тонн, то уравнение баланса начальной конфигурации весов запишется в виде

$$L_2 = 3 \cdot L_1 + 5 \text{ метров}.$$

После перемещения масс, указанного в задаче, уравнение баланса преобразуется к виду

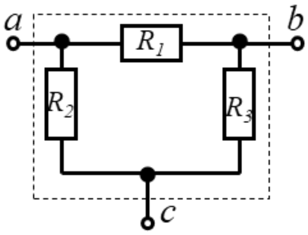
$$3 \cdot L_1 = L_1 + 5 \text{ метров},$$

откуда $2 \cdot L_1 = 5$ м, так что $L_1 = 2.5$ м. Подстановка этого результата в первое из уравнений даёт $L_2 = 12.5$ м.

Ответ: $L_1 = 2.5$ м, $L_2 = 12.5$ м.

Рекомендуемые баллы:
За понимание принципов балансирования весов – **до 4 баллов**
За правильное уравнение баланса в первой конфигурации – **до 6 баллов**
За правильное уравнение баланса во второй конфигурации – **до 6 баллов**
За получение значения L_1 **- до 4 баллов**.
За получение значения L_2 **- до 5 баллов**.

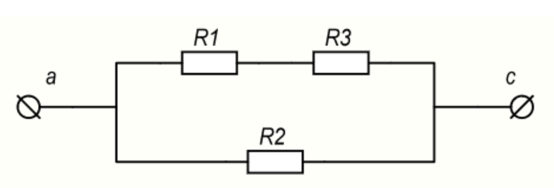
Задание 3. (25 баллов) **П- образный аттенюатор**

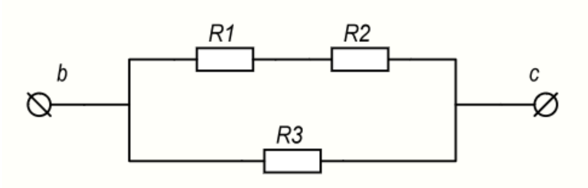


Мастер, ремонтируя радиоприемник, обнаружил вышедшие из строя несколько одинаковых П-образных аттенюаторов. К сожалению, замену аттенюаторам найти не удалось, а к счастью, один из аттенюаторов остался полностью работоспособным. Исследуя его устройство, мастер смог восстановить принципиальную электрическую схему, представленную на рисунке, и обнаружил что номинал резистора R1 по маркировке составил 50 Ом, а маркировка на двух резисторах R2 и R3 в результате термического воздействия не читается. Для изготовления вышедших из строя аттенюаторов определите значения сопротивлений резисторов R2 и R3, если измеренное электрическое сопротивление между точками ***a*** и ***c*** составило 29.33 Ом, между точками ***b*** и ***c*** составило 36 Ом.

Решение

Для более простого восприятия схему можно перерисовать в зависимости от места подключения измерительного прибора.





Для обоих случаев наблюдаем параллельное соединение одиночного резистора с двумя последовательно соединёнными. Рассмотрим случай подключения между точками **a** и **c**. Резисторы R_1 и R_3 соединены последовательно, общее сопротивление верхней ветви будет $R_{13} = R_1 + R_3$. К ним параллельно подключён резистор R_2. Сопротивление между точками **a** и **c** можно записать как:

$$\frac{1}{R_{ac}} = \frac{1}{R_{13}} + \frac{1}{R_2} \text{ или } \frac{1}{R_{ac}} = \frac{1}{R_1 + R_3} + \frac{1}{R_2}. \qquad (1)$$

Аналогично получаем выражение для R_{bc}:

$$\frac{1}{R_{bc}} = \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_3} \text{ или } \frac{1}{R_{bc}} = \frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3}. \qquad (2)$$

В итоге получили систему из двух уравнений (1) и (2) с двумя неизвестными R_2 и R_3. Из первого уравнения выразим R_2:

$$R_2 = \frac{1}{\frac{1}{R_{ac}} - \frac{1}{R_1 + R_3}} = \frac{R_{ac}\left(R_1 + R_3\right)}{R_1 + R_3 - R_{ac}}. \qquad (3)$$

Перед подстановкой выполним преобразование уравнения (2), приведём его в «одноэтажному» виду умножением на $\left(R_1 + R_2\right) R_3 R_{bc}$:

$$\left(R_1 + R_2\right) R_3 = R_3 R_{bc} + \left(R_1 + R_2\right) R_{bc}. \qquad (4)$$

Теперь подставим (3) в (4):

$$\left(R_1 + \frac{R_{ac}\left(R_1 + R_3\right)}{R_1 + R_3 - R_{ac}}\right) R_3 = R_3 R_{bc} + \left(R_1 + \frac{R_{ac}\left(R_1 + R_3\right)}{R_1 + R_3 - R_{ac}}\right) R_{bc}. \qquad (5)$$

Умножим обе части уравнения на $R_1 + R_3 - R_{ac}$ и раскроем все скобки:

$$\begin{aligned} & R_1^2 R_3 + R_1 R_3^2 - \underline{R_1 R_3 R_{ac}} + \underline{R_1 R_3 R_{ac}} + R_3^2 R_{ac} = \\ & = R_1 R_3 R_{bc} + R_3^2 R_{bc} - \underline{\underline{R_3 R_{ac} R_{bc}}} + R_1^2 R_{bc} + R_1 R_3 R_{bc} - \underline{R_1 R_{ac} R_{bc}} + \underline{R_1 R_{ac} R_{bc}} + \underline{\underline{R_3 R_{ac} R_{bc}}} \end{aligned} \qquad (6)$$

После приведения подобных получаем:

$$R_1^2 R_3 + R_1 R_3^2 + R_3^2 R_{ac} = 2 R_1 R_3 R_{bc} + R_3^2 R_{bc} + R_1^2 R_{bc}. \qquad (7)$$

Заметим, что уравнение относительно R_3 является квадратным, приведём его к виду $ax^2+bx+c=0$:

$$\left(R_1 + R_{ac} - R_{bc}\right) R_3^2 + \left(R_1^2 - 2 R_1 R_{bc}\right) R_3 - R_1^2 R_{bc} = 0. \qquad (8)$$

Далее будет удобно перейти к численным значениям:

$$43{,}33 \cdot R_3^2 - 1100 \cdot R_3 - 90000 = 0. \qquad (9)$$

Решим это квадратное уравнение через дискриминант:

$$\begin{aligned} R_3 &= \frac{1100 + \sqrt{1100^2 + 4 \cdot 43{,}33 \cdot 90000}}{2 \cdot 43{,}33} = \frac{1100 + \sqrt{16808800}}{86{,}66} \approx \\ &\approx \frac{1100 + \sqrt{16800\,000}}{86{,}66} = \frac{1100 + 100 \cdot \sqrt{1680}}{86{,}66} \approx \frac{1100 + 4100}{86{,}66} \approx 60. \end{aligned} \qquad (10)$$

Перед корнем стоит знак «+», т.к. отрицательное значение сопротивления не имеет физического смысла.

Полученное значение R_3 подставим в уравнение (3) и найдём R_2:

$$R_2 = \frac{R_{ac}\left(R_1 + R_3\right)}{R_1 + R_3 - R_{ac}} = \frac{29,33 \cdot 110}{80,67} \approx 40. \qquad (11)$$

Ответ: R_2 = 40 Ом, R_3 = 60 Ом.

Рекомендуемые баллы:
Знание формулы последовательного соединения резисторов **– до 3 баллов**
Знание формулы параллельного соединения резисторов **– до 3 баллов**
На основе формул составлена система из двух уравнений **– до 6 баллов**
Решение системы, пояснение отброса отрицательных корней **– до 8 баллов**
Получение верного численного ответа **– до 5 баллов**

Задание 4. (25 баллов) **Линия из планет**
Будем считать, что Земля, Марс и Юпитер вращаются вокруг Солнца по окружностям, лежащим в одной плоскости, с постоянными скоростями. Вращение всех трех планет направлено в одну и ту же сторону. Земля делает один оборот вокруг Солнца за 365.26 суток, Марс – за 686.98 суток, а Юпитер – за 4332.59 суток. Пусть в некоторый момент все три планеты оказываются на одной и той же прямой линии вместе с Солнцем, с одной и той же стороны от него. Сколько раз Земля и Марс снова займут положение на одной прямой с Солнцем до тех пор, пока прямая Солнце – Юпитер не окажется в пределах 10° от Земли и Марса? Рассматривать только те конфигурации планет, в которых все они находятся с одной и той же стороны от Солнца.

Решение

Угловые скорости вращения планет относительно Солнца имеют следующие значения:

- Земля, $\nu_З$ = 360°/365.26 = 0.98560 градусов/сутки;
- Марс, $\nu_М$ = 360°/686.98 = 0.52403 градусов/сутки;
- Юпитер, $\nu_Ю$ = 360°/4332.59 = 0.083091 градусов/сутки.

Рассмотрим угловые скорости вращения Земли и Марса относительно линии, соединяющей Солнце с Юпитером:

$$\nu_{ЗЮ} = \nu_З - \nu_Ю = 0.90251 \text{ градусов/сутки;}$$
$$\nu_{МЮ} = \nu_М - \nu_Ю = 0.44094 \text{ градусов/сутки.}$$

В этой системе отсчёта (назовём её системой Юпитера) Земля и Марс снова окажутся на одной радиальной прямой (с одной и той же стороны от Солнца) тогда, когда Земля обгонит Марс на 360°. Обозначим через T_1 период времени между такими встречами:

$$\nu_{ЗЮ} \cdot T_1 - \nu_{МЮ} \cdot T_1 = 360^\circ \Rightarrow T_1 = \frac{360^\circ}{\nu_{ЗЮ} - \nu_{МЮ}} = 779.95 \text{ суток.}$$

Отметим, что период «встреч» Земли и Марса от выбора вращающейся системы отсчёта не зависит – он будет одним и тем же в любой подобной системе.

Марс совершит один полный оборот в «системе Юпитера» за время

$$T_{МЮ} = \frac{360^\circ}{\nu_{МЮ}} = 816.43 \text{ суток.}$$

В момент $T_{МЮ}$ Марс окажется с Юпитером на одной линии, соединяющей их с Солнцем. Этот момент отстанет от момента встречи Земли и Марса T_1 на

$$\Delta T = T_{МЮ} - T_1 = 36.482 \text{ суток.}$$

За время ΔT Марс пройдёт 16.09° до того, как окажется на одной радиальной прямой с Юпитером. Соответственно, в момент встречи Земли с Марсом прямая Солнце-Юпитер находится за пределами 10°, нужных для решения задачи.

С каждой следующей встречей Земли и Марса расхождение между положениями прямых Солнце-Земля-Марс и Солнце-Юпитер-Марс будет накапливаться, увеличиваясь на 16.087°. Марс, Земля и Юпитер окажутся почти на одной линии тогда, когда указанное расхождение приблизится к 360°. Деление 360° на 16.09° даёт 22.37. В момент 22-й встречи Земли и Марса линия Солнце-Земля-Марс будет отставать от линии Солнце-Юпитер-Марс на следующий угол:

$$\alpha = 22 \cdot 16.087 = 353.9°.$$

Учитывая, что значение α, равное 360°, обеспечило бы полное совпадение прямых Солнце-Земля-Марс и Солнце-Юпитер-Марс, получаем отклонение

$$\Delta\alpha = 360° - 353.9° = 6.1°.$$

Полученная точность совпадения прямых Солнце-Земля-Марс и Солнце-Юпитер-Марс удовлетворяет условию задачи. Таким образом, Земля и Марс займут положение на одной прямой с Солнцем 22 раза до новой «встречи» с Юпитером.

Ответ: 22 раза.

Рекомендуемые баллы:
За понимание концепции угловых скоростей – **до 2 баллов**
За получение периода встреч Марса с Землёй на одной прямой с Солнцем – **до 8 баллов**
За правильное рассмотрение периодов расположения Марса либо Земли на одной прямой с Юпитером и Солнцем – **до 8 баллов**
За доведение решения до правильного ответа - **до 7 баллов**.

Время выполнения задания – 180 минут. Максимальное количество баллов – 100

Задание 1. (25 баллов) **Плавление метеорита**

Рассмотрим упрощенную модель плавления метеорита, летящего сквозь земную атмосферу, согласно которой его внешние слои разогреваются до температуры плавления, плавятся, а затем сдуваются потоком воздуха. Будем считать, что внутренняя область метеорита остаётся холодной (имеет температуру, равную 270 K), пока не оказывается в прямом контакте с атмосферой. Пусть разогрев некоторого метеорита происходит только за счет его кинетической энергии, которая пропорциональна исходной массе. Когда эта энергия будет израсходована, данный метеорит потеряет 90 % своей массы, если его разогрев и плавление будут соответствовать модели, описанной выше. Альтернативная модель может состоять в том, что весь метеорит сначала прогревается до температуры плавления (1800 K), а затем плавится до тех пор, пока не будет израсходована вся кинетическая энергия. Расплавленные слои уносятся потоком воздуха, аналогично первой модели. Какую часть массы потеряет тот же самый метеорит при плавлении, описываемом второй моделью? Теплоемкость метеорита принять равной 600 Дж/кг·К, удельную теплоту плавления – равной 280 кДж/кг.

Решение

Пусть ν^2 – начальная скорость метеорита, связанная с кинетической энергией и массой соотношением

$$E_{кин} = m\upsilon^2 / 2\,.$$

Обозначим через Δm_1 массу, которую метеорит потеряет, если будет плавиться согласно первой модели. В этом случае, вся кинетическая энергия пойдёт на нагрев и плавление именно этой массы, так что

$$m\upsilon^2 / 2 = \Delta m_1 \cdot \left(c \cdot \Delta T + \lambda\right),$$

где c = 600 Дж/кг – удельная теплоемкость метеорита, ΔT = 1800-270 = 1530 K – изменение температуры его расплавившихся слоев. Соответственно,

$$\frac{\upsilon^2}{2} = \frac{\Delta m_1}{m} \cdot \left(c \cdot \Delta T + \lambda\right) = \left(90\,\%\right) \cdot \left(c \cdot \Delta T + \lambda\right) = 0.9 \cdot \left(c \cdot \Delta T + \lambda\right) = 1078200 \text{ Дж/кг}\,.$$

Пусть Δm_2 – масса, которую метеорит теряет в рамках второй модели плавления. Здесь, до температуры плавления разогревается вся масса метеорита, расплавлена же будет только масса Δm_2:

$$m\upsilon^2 / 2 = m \cdot c \cdot \Delta T + \lambda \cdot \Delta m_2\,.$$

Теперь,

$$\frac{\upsilon^2}{2} = c \cdot \Delta T + \lambda \cdot \frac{\Delta m_2}{m} = 0.9 \cdot \left(c \cdot \Delta T + \lambda\right) \Rightarrow$$

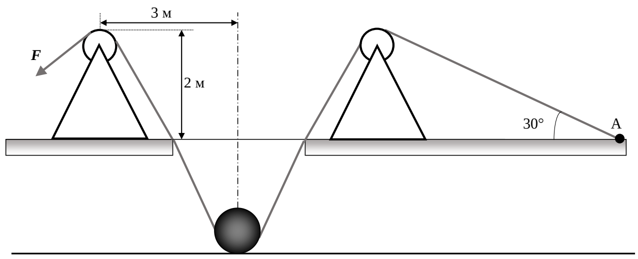
$$\frac{\Delta m_2}{m} = \frac{0.9 \cdot \left(c \cdot \Delta T + \lambda\right) - c \cdot \Delta T}{\lambda} = 0.9 - 0.1 \cdot \frac{c \cdot \Delta T}{\lambda} = 0.572 = 57.2\,\%.$$

Ответ: при плавлении по второй модели метеорит потеряет 57.2 % массы.

Рекомендуемые баллы:

За понимание связи между кинетической энергией и массой метеорита – **до 4 баллов**
За правильное использование теплоемкости – **до 4 баллов**
За правильное использование удельной теплоты плавления – **до 4 баллов**
За правильное применение первой модели плавления метеорита - **до 6 баллов**.
За правильное применение второй модели плавления метеорита - **до 6 баллов**.
За правильный численный ответ - **до 1 балла**.

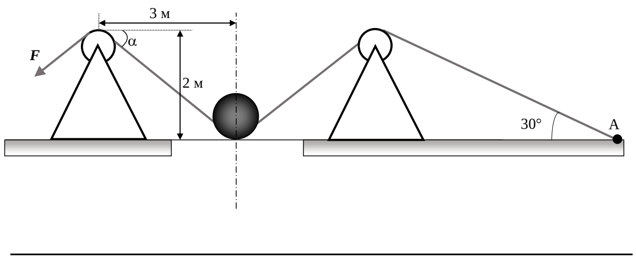
Задание 2. (25 баллов) **Метеорит под водой**



Метеорит, упавший в озеро, находится на глубине, равной 2 метрам. Для того, чтобы поднять метеорит, на льду озера строят систему опор и блоков, показанную на Рисунке. Какое давление должен выдержать лёд под опорами в процессе подъёма метеорита, если площади каждой из опор составляют 4 м^2? Масса метеорита равна 10 тонн, он должен быть поднят из воды полностью. Считать, что в точке А трос хорошо закреплен, а сила F будет достаточной для реализации всего процесса подъёма. Опоры и края проруби симметричны относительно метеорита. Размерами и массой блоков можно пренебречь.

Решение

Согласно условию задачи, метеорит должен быть поднят из воды полностью. Так что, рассмотрим баланс сил в его надводном положении, как показано на Рисунке:



Линейные размеры метеорита в задаче не указаны. Будем считать их достаточно малыми для того, чтобы тангенс угла α, показанного на Рисунке, мог быть рассчитан с использованием данных там же размеров:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{2}{3}.$$

Пусть сила натяжения троса, удерживающего метеорит, равна T. Тогда вертикальная сила, действующая на метеорит со стороны тросов, уравновешена силой тяжести:

$$F_{\mathrm{T}} = 2 \cdot T \cdot \sin\alpha = mg,$$

где m – масса метеорита, g – ускорение свободного падения, которое принимаем равным 9.8 м/с^2. Таким образом,

$$T = \frac{mg}{2 \cdot \sin\alpha}.$$

Здесь,

$$\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = 0.5547.$$

Этот же результат можно получить через тангенс, приведенный выше:

$$\sin\alpha = \mathrm{tg}\alpha \cdot \sqrt{\frac{1}{\mathrm{tg}^2\alpha + 1}}..$$

Подстановка числовых данных даёт

$$T = \frac{mg}{2 \cdot \sin\alpha} = 88336\ \text{Н}..$$

На левую опору трос будет давить вертикально вниз с силой

$$F_{\text{опоры}} = T \cdot \sin\alpha + T \cdot \sin\left(30^\circ\right) = T \cdot \left(\sin\alpha + 0.5\right) = \\ = \frac{mg}{2} + \frac{mg}{4 \cdot \sin\alpha} = \frac{mg}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2 \cdot \sin\alpha}\right). \qquad (*).$$

Как видно из правой части формулы, сила $F_{опоры}$ увеличивается с уменьшением угла α, так что в процессе подъёма метеорита из воды она увеличивалась. К тому же, пока метеорит находился в воде, его вес был частично скомпенсирован силой Архимеда. Таким образом, максимальным значением силы, действующей на опору в процессе подъёма метеорита из воды, будет именно то, что даётся формулой (*).

Будем считать, что симметрия опор, отмеченная в задаче, относится не только к их расположению, но и к силе $F_{опоры}$. Также, пренебрежем массами опор, поскольку они неизвестны. Подстановка чисел в формулу (*) даёт

$$F_{опоры} = 93168\,\text{Н}.$$

Давление опоры на лёд равно отношению силы $F_{опоры}$ к площади, равной 4 м^2. Именно это давление P лёд и должен выдержать:

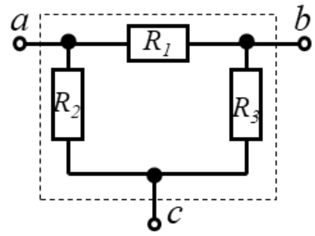
$$P = F_{опоры}/4 = 23292\,\text{Па} \approx 23000\,\text{Па}.$$

Давление округлено с точностью до двух значащих цифр, поскольку точность исходных данных – одна значащая цифра.

Рекомендуемые баллы:
За правильное рассмотрение силы натяжения троса – **до 4 баллов**
За правильные проекции сил на вертикальную ось – **до 10 баллов**
За получение вертикальной силы, действующей на опору – **до 6 баллов**
За правильный расчет давления опоры на лёд - **до 4 баллов**.

Ответ: Лёд должен выдержать 23 кПа.

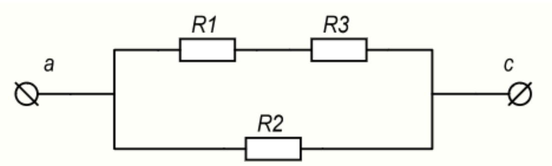
Задание 3. (25 баллов) **П- образный аттенюатор**

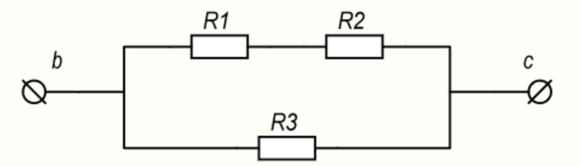


Мастер, ремонтируя радиоприемник, обнаружил вышедшие из строя несколько одинаковых П-образных аттенюаторов. К сожалению, замену аттенюаторам найти не удалось, а к счастью, один из аттенюаторов остался полностью работоспособным. Исследуя его устройство, мастер смог восстановить принципиальную электрическую схему, представленную на рисунке, и обнаружил что номинал резистора R1 по маркировке составил 40 Ом, а маркировка на двух резисторах R2 и R3 в результате термического воздействия не читается. Для изготовления вышедших из строя аттенюаторов определите значения сопротивлений резисторов R2 и R3, если измеренное электрическое сопротивление между точками ***a*** и ***c*** составило 29.33 Ом, между точками ***b*** и ***c*** составило 36 Ом.

Решение

Для более простого восприятия схему можно перерисовать в зависимости от места подключения измерительного прибора.





Для обоих случаев наблюдаем параллельное соединение одиночного резистора с двумя последовательно соединёнными. Рассмотрим случай подключения между точками **а** и **с**. Резисторы R_1 и R_3 соединены последовательно, общее сопротивление верхней ветви будет $R_{13} = R_1 + R_3$. К ним параллельно подключён резистор R_2. Сопротивление между точками **а** и **с** можно записать как:

$$\frac{1}{R_{ac}}=\frac{1}{R_{13}}+\frac{1}{R_2} \text{ или } \frac{1}{R_{ac}}=\frac{1}{R_1+R_3}+\frac{1}{R_2}. \qquad (1)$$

Аналогично получаем выражение для R_{bc}:

$$\frac{1}{R_{bc}}=\frac{1}{R_{12}}+\frac{1}{R_3} \text{ или } \frac{1}{R_{bc}}=\frac{1}{R_1+R_2}+\frac{1}{R_3}. \qquad (2)$$

В итоге получили систему из двух уравнений (1) и (2) с двумя неизвестными R_2 и R_3. Из первого уравнения выразим R_2:

$$R_2=\frac{1}{\frac{1}{R_{ac}}-\frac{1}{R_1+R_3}}=\frac{R_{ac}\left(R_1+R_3\right)}{R_1+R_3-R_{ac}}. \qquad (3)$$

Перед подстановкой выполним преобразование уравнения (2), приведём его в «одноэтажному» виду умножением на $\left(R_1+R_2\right)R_3R_{bc}$:

$$\left(R_1+R_2\right)R_3=R_3R_{bc}+\left(R_1+R_2\right)R_{bc}. \qquad (4)$$

Теперь подставим (3) в (4):

$$\left(R_1+\frac{R_{ac}\left(R_1+R_3\right)}{R_1+R_3-R_{ac}}\right)R_3=R_3R_{bc}+\left(R_1+\frac{R_{ac}\left(R_1+R_3\right)}{R_1+R_3-R_{ac}}\right)R_{bc}. \qquad (5)$$

Умножим обе части уравнения на $R_1+R_3-R_{ac}$ и раскроем все скобки:

$$\begin{aligned}&R_1^2R_3+R_1R_3^2-\underline{R_1R_3R_{ac}}+\underline{R_1R_3R_{ac}}+R_3^2R_{ac}=\\&=R_1R_3R_{bc}+R_3^2R_{bc}-\underline{\underline{R_3R_{ac}R_{bc}}}+R_1^2R_{bc}+R_1R_3R_{bc}-\underline{R_1R_{ac}R_{bc}}+\underline{R_1R_{ac}R_{bc}}+\underline{\underline{R_3R_{ac}R_{bc}}}\end{aligned} \qquad (6)$$

После приведения подобных получаем:

$$R_1^2R_3+R_1R_3^2+R_3^2R_{ac}=2R_1R_3R_{bc}+R_3^2R_{bc}+R_1^2R_{bc}. \qquad (7)$$

Заметим, что уравнение относительно R_3 является квадратным, приведём его к виду $ax^2+bx+c=0$:

$$\left(R_1+R_{ac}-R_{bc}\right)R_3^2+\left(R_1^2-2R_1R_{bc}\right)R_3-R_1^2R_{bc}=0. \qquad (8)$$

Далее будет удобно перейти к численным значениям:

$$33{,}33\cdot R_3^2-1280\cdot R_3-57600=0. \qquad (9)$$

Решим это квадратное уравнение через дискриминант:

$$\begin{aligned}R_3&=\frac{1280+\sqrt{1280^2+4\cdot 33{,}33\cdot 57600}}{2\cdot 33{,}33}=\frac{1280+\sqrt{9317632}}{66{,}66}\approx\\&\approx\frac{1280+\sqrt{9320000}}{66{,}66}\approx\frac{1280+100\cdot 30{,}5}{66{,}66}=\frac{4330}{66{,}66}\approx 65.\end{aligned} \qquad (10)$$

Перед корнем стоит знак «+», т.к. отрицательное значение сопротивления не имеет физического смысла. Полученное значение R_3 подставим в уравнение (3) и найдём R_2:

$$R_2=\frac{R_{ac}\left(R_1+R_3\right)}{R_1+R_3-R_{ac}}=\frac{29{,}33\cdot 105}{75{,}67}\approx 40{,}7. \qquad (11)$$

Ответ: R_2 = 40,7 Ом, R_3 = 65 Ом.

Рекомендуемые баллы:

Знание формулы последовательного соединения резисторов **– до 3 баллов**

Знание формулы параллельного соединения резисторов **– до 3 баллов**

На основе формул составлена система из двух уравнений **– до 6 баллов**

Решение системы, пояснение отброса отрицательных корней **– до 8 баллов**
Получение верного численного ответа **– до 5 баллов**

Задание 4. (25 баллов) **Сближение звезд**
На некоторой планете с интервалом в 50 тысяч лет происходят масштабные извержения вулканов, выбрасывающие в космос огромные количества вещества, имеющего уникальный состав. Пусть это вещество движется от планеты со скоростью 20 км/с. В другой звездной системе геологи обнаружили три слоя пыли с первой планеты. Интервал между первым и вторым слоями составил 31 тысячу лет, тогда как между вторым и третьим слоями – 27 тысяч лет. С каким постоянным ускорением приближается к первой планете звездная система геологов? Ответ дать в км/с за тысячу лет, с точностью до двух значащих цифр.

Решение

Будем считать Планету 1 практически неподвижной относительно центра системы концентрических колец, образованных пылью. Это предположение вытекает из условия задачи, поскольку скорость удаления этих колец от планеты задана константой: $v_{пыли} = 20$ км/с. В таком случае, расстояние между пылевыми кольцами, движущимися с Планеты 1, будет постоянной величиной $d = 50 \cdot 20 = 1000$ км/с·тыс. лет.

Пусть $v_{12}(t)$ – скорость сближения Планет 1 и 2, зависящая от времени t. Эта скорость направлена вдоль прямой, соединяющей планеты. С учетом неподвижности Планеты 1, можно рассмотреть скорость сближения Планеты 2 с пылевыми кольцами

$$v(t) = v_{12}(t) + v_{\text{пыли}}.$$

На Планете 2 обнаружено 3 слоя пыли с Планеты 1. Интервалы времени между появлением этих слоев равны временам прохождения Планетой 2 расстояния d между пылевыми кольцами. Пусть t_1, t_2 и t_3 – моменты встречи Планеты 2 с каждым из колец. Значения интервалов времени:

$$\Delta t_{12} = t_2 - t_1 = 31\,\textit{тыс. лет};$$

$$\Delta t_{23} = t_3 - t_2 = 27\,\textit{тыс. лет}.$$

Указанные интервалы времени могут быть рассчитаны с использованием средних скоростей:

$$\langle v \rangle_{12} = \frac{v(t_1) + v(t_2)}{2}; \langle v \rangle_{23} = \frac{v(t_2) + v(t_3)}{2};$$

$$\Delta t_{12} = \frac{d}{\langle v \rangle_{12}}; \Delta t_{23} = \frac{d}{\langle v \rangle_{23}}.$$

Можно записать систему уравнений

$$\begin{cases} v(t_1) + v(t_2) = 2d / \Delta t_{12}, \\ v(t_2) + v(t_3) = 2d / \Delta t_{23}. \end{cases}$$

Если скорость $v(t)$ увеличивается с постоянным ускорением a, то

$$v(t_2) = v(t_1) + a \cdot \Delta t_{12}, v(t_3) = v(t_1) + a \cdot (\Delta t_{12} + \Delta t_{23}),$$

так что система уравнений преобразуется к виду

$$\begin{cases} 2 \cdot v(t_1) + a \cdot \Delta t_{12} = 2d / \Delta t_{12}, \\ 2 \cdot v(t_1) + a \cdot (2\Delta t_{12} + \Delta t_{23}) = 2d / \Delta t_{23}. \end{cases}$$

Вычитая первое уравнение из второго, получаем

$$a \cdot (\Delta t_{12} + \Delta t_{23}) = 2d\left(\frac{1}{\Delta t_{23}} - \frac{1}{\Delta t_{12}}\right) = 2d\frac{\Delta t_{12} - \Delta t_{23}}{\Delta t_{12} \cdot \Delta t_{23}} \Rightarrow$$

$$a = \frac{2d \cdot (\Delta t_{12} - \Delta t_{23})}{\Delta t_{12} \cdot \Delta t_{23} \cdot (\Delta t_{12} + \Delta t_{23})} = \frac{2 \cdot 1000\,\text{км/с×тыс. лет} \cdot 4\,\text{тыс. лет}}{31 \cdot 27\,\text{тыс. лет}^2 \cdot 58\,\text{тыс. лет}} = 0.1648\,\text{км/с за тысячу лет}.$$

Отметим, что результат приведён с 4-мя значащими цифрами для упрощения его сравнения с расчетами участников олимпиады. Ответ, согласно условию задачи, следует округлить до 2 значащих цифр.

Ответ: 0.16 км/с за тысячу лет.

Рекомендуемые баллы:
За правильное рассмотрение расстояния между пылевыми кольцами – **до 2 баллов**
За правильное рассмотрение скорости сближения Планеты 2 с пылевыми кольцами – **до 6 баллов**
За хорошую попытку установления связи между ускоренным сближением планет и переменностью интервалов времени между слоями пыли – **до 10 баллов**
За получение обоснованного правильного ответа **- до 7 баллов**.

Время выполнения задания – 180 минут. Максимальное количество баллов – 100

Задание 1. (25 баллов) **Протозвезда в газовом облаке**

Протозвезда массы $M = 2 \cdot 10^{30}$ кг, которую можно рассматривать как точечный источник гравитационного поля, движется через однородное облако молекулярного водорода с постоянной скоростью, равной 10 км/с. Какую массу вещества сможет поглотить эта протозвезда на пути длиной в один световой год (расстояние, которое свет проходит за год), если она захватывает молекулы водорода, приближающиеся на расстояния менее 200 астрономических единиц ($2.94 \cdot 10^{10}$ км)? Потенциальную энергию молекулы водорода массы m в гравитационном поле рассчитывать по формуле $E_{пот} = -G \cdot M \cdot m/R$, где R – расстояние до центра протозвезды, $G = 6.67430 \cdot 10^{-11}$ м^{3}кг$^{-1}$с$^{-2}$ – гравитационная постоянная. Скорость света принять равной $3 \cdot 10^8$ м/с. Концентрация молекул водорода в облаке равна 10^5 частиц/см^3. Изменением гравитационного поля, связанным с увеличением массы протозвезды, пренебречь.

Решение

Пусть протозвезда движется сквозь газовое облако по прямой. Эту прямую можно рассмотреть в качестве оси цилиндра, длина которого равна 1 световому году, а радиус равен некоторому критическому значению $R_{крит}$. Молекулы водорода, расположенные внутри этого цилиндра, будут захвачены протозвездой, тогда как молекулы вне цилиндра захвачены не будут. Ниже, найдём радиус цилиндра $R_{крит}$.

Для того, чтобы проще описать взаимодействие частиц облака с протозвездой, выберем протозвезду в качестве начала координат системы отсчета, движущейся со скоростью $V = 10$ км/с. В этой системе отсчета протозвезда покоится, а вещество облака движется мимо неё со скоростью $v_0 = 10$ км/с. Молекулы водорода будут притягиваться к протозвезде за счет гравитационного притяжения.

Отметим, что несмотря на очень низкую плотность, молекулярное облако в космических масштабах можно рассматривать как сплошную среду (идеальный газ), поскольку длина свободного пробега молекул водорода составляет около 0.005 астрономических единицы, что мало по сравнению с характерными для космоса расстояниями. Однако, в данной задаче скорость движения молекул относительно протозвезды намного более высока, чем скорость теплового движения молекул (0.8 км/с при температуре облака, равной 50 K). Это значит, что близкие молекулы водорода можно считать покоящимися друг относительно друга, вокруг протозвезды они будут двигаться одинаково, и свойства сплошной среды не проявятся. Таким образом, рассмотрим движение молекулы относительно протозвезды так, как если бы оно происходило в вакууме.

В качестве модельного представления, задача предполагает, что на расстояниях менее 200 астрономических единиц от центра протозвезды описывать движение частиц без взаимодействия с окружением уже нельзя, из-за высокой плотности вещества. Поэтому условие задачи предполагает, что на меньших расстояниях протозвезда «автоматически» захватывает частицы. На Рисунке 1 схематически показана траектория молекулы, избегающей захвата протозвездой.

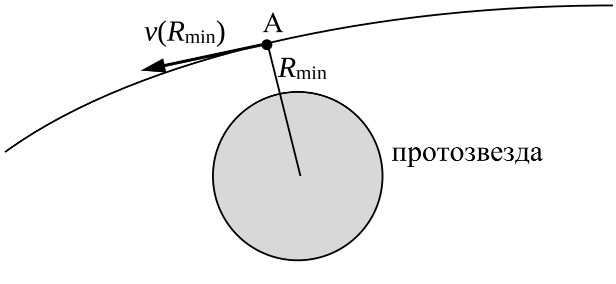


Рисунок 1. Минимальное расстояние от молекулы до протозвезды

При движении молекулы в гравитационном поле будут сохраняться полная механическая энергия, а также момент импульса. На большом расстоянии от протозвезды потенциальная энергия $E_{пот}$ стремится к нулю, тогда как кинетическая энергия далёких молекул массы m в системе отсчета, неподвижной относительно протозвезды, даётся формулой

$$E_{\text{кин}} = mv_0^2/2.$$

Момент импульса можно рассчитать как векторное произведение радиус-вектора, соединяющего молекулу с центром протозвезды, и вектора скорости частицы относительно протозвезды. На большом расстоянии от протозвезды

$$\vec{M} = m \cdot \left(\vec{R} \times \vec{v}_0\right)$$

Вектор $\vec{M}$ сохраняет свои значение и направление, будучи перпендикулярным к векторам $\vec{R}$ и $\vec{v}_0$, откуда следует, что движение молекулы вокруг протозвезды всё время происходит в одной и той же плоскости. Значение модуля момента импульса

$$\left|\vec{M}\right| = m \cdot \left|\vec{R}\right| \cdot \left|\vec{v}_0\right| \cdot \sin\left(\vec{R} \wedge \vec{v}_0\right) = m \cdot v_0 \cdot b\,,$$

где b – начальное расстояние между молекулой и осью x, показанное на Рисунке 2.

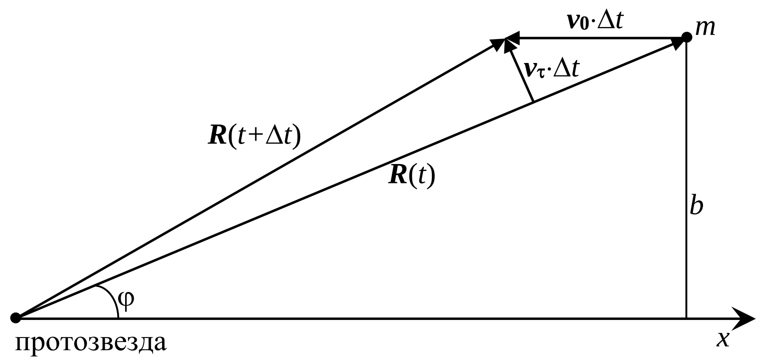


Рисунок 2. К расчету момента импульса молекулы на большом расстоянии от протозвезды.

Без использования векторной формы, момент импульса молекулы можно получить через произведение расстояния R и компоненты вектора $\vec{v}_0$, направленной перпендикулярно вектору $\vec{R}$. Иллюстрация такого подхода приведена на Рисунке 2. Компонента скорости v_τ фактически представляет собой движение вдоль участка окружности, радиус которой совпадает с текущим расстоянием R от центра протозвезды до молекулы:

$$\left|\vec{M}\right| = m \cdot R \cdot v_\tau = m \cdot R \cdot v_0 \cdot \sin\varphi = m \cdot R \cdot v_0 \cdot (b\,/\,R) = m \cdot v_0 \cdot b.$$

На Рисунке 2 $R(t+\Delta t) \approx R(t)$, если расстояние R велико по сравнению с $v_0 \cdot \Delta t$.

В точке А, ближайшей к центру протозвезды (Рисунок 1), вектор скорости направлен перпендикулярно радиус-вектору. Это значит, что момент импульса здесь равен $m \cdot v \cdot R_{\min}$, так что

$$v\left(R_{\min}\right) \cdot R_{\min} = v_0 \cdot b\,.$$

Закон сохранения энергии при этом даст

$$\frac{mv\left(R_{\min}\right)^2}{2} - G\frac{M \cdot m}{R_{\min}} = \frac{mv_0^2}{2}\,.$$

Пусть $R_{\min}$ совпадает с радиусом захвата молекул протозвездой (200 а.е.). Соответствующее значение b в этом случае совпадёт с критическим радиусом цилиндра $R_{\text{крит}}$, внутри которого находятся захватываемые молекулы. Таким образом

$$v\left(R_{\min}\right)=\sqrt{v_0^2+\frac{2GM}{R_{\min}}}=10.4\text{ км/с},$$

откуда

$$R_{крит}=\frac{v\left(R_{\min}\right)\cdot R_{\min}}{v_0}=\sqrt{R_{\min}^2+\frac{2GM\cdot R_{\min}}{v_0^2}}=3.07\cdot10^{10}\text{ км}.$$

Объём цилиндра, внутри которого будут поглощены молекулы:

$$V=\pi\cdot R_{крит}^2\cdot\left(1\,\text{св. год}\right)=2.8\cdot10^{34}\text{ км}^3.$$

Использовано значение 1 св. год = $9.46\cdot10^{12}$ км. Массу поглощенного вещества получаем умножением объёма на плотность, с учетом того, что масса молекулы водорода равна 2 а.е.м., то есть $3.32\cdot10^{-27}$ кг. В результате $M_{погл} = 9.3\cdot10^{27}$ кг. Эта масса мала по сравнению с массой протозвезды, так что изменением гравитационной силы в процессе её поглощения при решении задачи можно было пренебречь.

Ответ: $M_{погл} = 9.3\cdot10^{27}$ кг.

Рекомендуемые баллы:
Понимание того, что молекулы будут захватываться протозвездой внутри цилиндра некоторого радиуса, построенного вдоль её траектории – **до 6 баллов**.
Разумная модель расчета радиуса цилиндра, не обязательно верная – **до 4 баллов**.
Правильный расчет массы вещества внутри цилиндра с тем радиусом, который был получен в ходе решения задачи – **до 7 баллов**.
Правильный расчет радиуса цилиндра – **до 8 баллов.**

Задание 2. (25 баллов) **Яркость Венеры**
Принять, что Земля и Венера вращаются вокруг Солнца по круговым орбитам с радиусами $R_З = 147\cdot10^6$ км, $R_В = 108\cdot10^6$ км. Считать, что яркость Венеры пропорциональна освещенной доле площади её диска, видимого с Земли, а также обратно пропорциональна квадрату расстояния от Земли до Венеры. Построить график зависимости яркости Венеры от её расстояния до Земли, позволяющий определить положение максимума яркости. Оценить положение этого максимума с точностью, не худшей, чем 0.1 астрономической единицы ($0.1\cdot R_З$). Считать, что освещенная часть поверхности Венеры, как и часть поверхности, видимая с Земли, представляют собой полусферы, ограниченные плоскими сечениями α и β, проходящими через центр Венеры. Освещенную долю площади диска Венеры, видимого с Земли, рассчитывать по формуле $S = (1 - \cos(\varphi))/2$, где φ - угол между сечениями α и β.

Решение

Для изучения яркости Венеры, рассмотрим Рисунок 1. Буквой S на Рисунке обозначена область на поверхности Венеры, которая одновременно освещена Солнцем и видима с Земли. Также, на Рисунке 1 показаны сечения α и β, пересекающиеся под углом φ. Проекция области S на диск Венеры, обращенный к Земле, имеет форму месяца, который схематически показан на том же Рисунке. Именно площадь этого месяца, как доля от площади диска Венеры, даётся формулой $S = (1 - \cos(\varphi))/2$, приведенной в условии задачи.

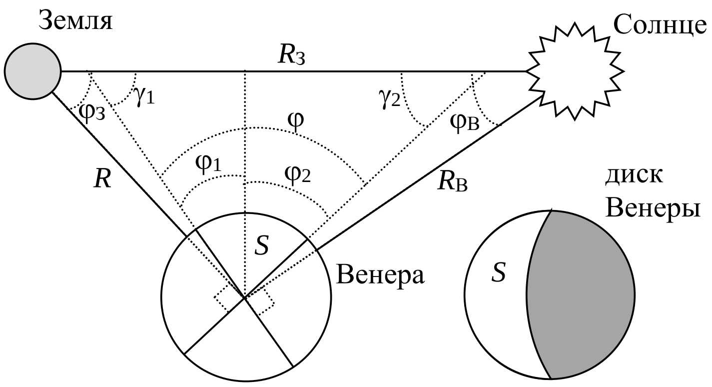


Рисунок 1. Положение и освещенность Венеры.

На Рисунке 1, угол φ является суммой углов φ_1 и φ_2. В свою очередь, угол φ_1 равен $90° - \gamma_1$, тогда как $\gamma_1 = 90° - \varphi_В$. Таким образом,

$$\varphi_1 = 90° - (90° - \varphi_В) = \varphi_В.$$

Аналогично,

$$\varphi_2 = 90° - (90° - \varphi_З) = \varphi_З.$$

Получили, что

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_З + \varphi_В.$$

Яркость L Венеры, видимой с Земли, пропорциональна величине

$$S = (1 - \cos(\varphi))/2 = (1 - \cos(\varphi_З + \varphi_В))/2.$$

Одновременно, яркость L будет пропорциональна телесному углу Ω, который Венера занимает на небе. Этот угол равен площади сечения Венеры, проходящего через её центр, деленной на квадрат расстояния до Венеры и на 4π. Площадь сечения – константа. Квадрат расстояния даётся формулой

$$R^2 = R_З^2 + R_В^2 - 2R_З R_В \cdot \cos(\varphi_В).$$

Согласно условию задачи, положение максимума яркости нужно определить с точностью до $0.1 \cdot R_З$. Поэтому, будем в дальнейшем выражать радиус в единицах $R_З$. То есть

$$(R/R_З)^2 = 1 + (R_В/R_З)^2 - 2(R_В/R_З) \cdot \cos(\varphi_В).$$

В целом,

$$L = \text{const} \cdot \frac{1 - \cos(\varphi_В + \varphi_З)}{(R/R_З)^2} = \text{const} \cdot \frac{1 - \cos(\varphi_В + \varphi_З)}{1 + (R_В/R_З)^2 - 2(R_В/R_З) \cdot \cos(\varphi_В)}. \quad (*)$$

Углы $\varphi_В$ и $\varphi_З$ связаны соотношением

$$R \cdot \sin(\varphi_З) = R_В \cdot \sin(\varphi_В) \Rightarrow \sin(\varphi_З) = \frac{R_В}{R} \cdot \sin(\varphi_В).$$

При известных $\varphi_В$ и R, можно рассчитывать $\varphi_З$ по формуле

$$\varphi_З = \arcsin\left(\frac{R_В}{R} \cdot \sin(\varphi_В)\right),$$

после чего построить зависимость $L(R)$ по формуле (*). С другой стороны, можно учесть следующие соотношения:

$$\cos(\varphi_B + \varphi_З) = \cos\varphi_B \cdot \cos\varphi_З - \sin\varphi_B \cdot \sin\varphi_З,$$

$$R \cdot \cos\varphi_З = R_З - R_B \cdot \cos\varphi_B \Rightarrow \cos\varphi_З = \frac{1-(R_B/R_З)\cdot\cos\varphi_B}{(R/R_З)}\cdot$$

После подстановки этих соотношений в формулу (*):

$$L = \text{const}\cdot\frac{(R/R_З)+(R_B/R_З)-\cos(\varphi_B)}{(R/R_З)^3}. \ (**)$$

Для того, чтобы найти максимум L, можно продифференцировать L по ($R/R_З$) и потребовать равенства этой производной нулю. Такое дифференцирование представляется слишком сложным на школьном уровне, поэтому в задаче предложено оценить положение максимума с помощью графика. При варьировании ($R/R_З$) нужно учитывать, что

$$\cos(\varphi_B) = \frac{1+(R_B/R_З)^2-(R/R_З)^2}{2(R_B/R_З)}.$$

При получении таблицы значений, учтём, что минимальное возможное значение $R/R_З$ равно 1 - $R_В/R_З$ = 0.27.

Таблица. Яркость Венеры в зависимости от расстояния до Земли

$R/R_З$	cos($\varphi_В$)	L/const
0.3	0.99	1.73
0.35	0.96	2.78
0.4	0.94	3.04
0.45	0.91	3.00
0.5	0.88	2.84
0.55	0.84	2.65

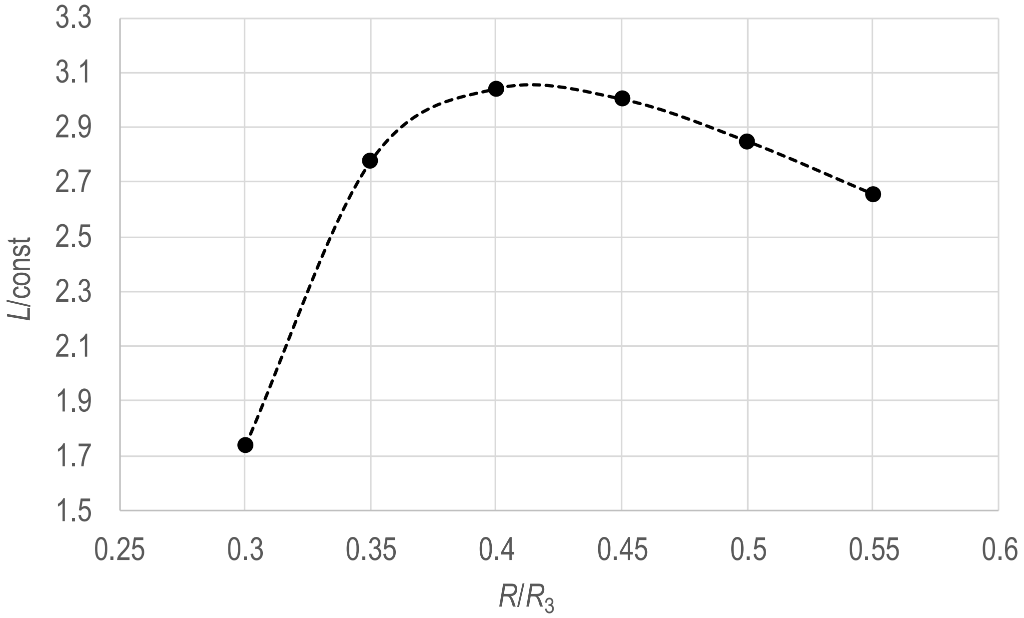


Рисунок 2. Яркость Венеры в зависимости от расстояния до Земли.

Из Таблицы и Рисунка 2 видно, что максимум яркости Венеры достигается на расстоянии $R/R_З \approx 0.4$, что является ответом задачи.

Ответ: $R(L_{макс})$ = 0.4 астрономических единиц (а.е.)

Рекомендуемые баллы:
Понимание причин изменения яркости Венеры в зависимости от положения относительно Земли и Солнца – **до 9 баллов**.
Получение зависимости яркости Венеры от координат (расстояний, углов), харапктеризующих её положение– **до 10 баллов**.
Построение графика яркости и определение положения максимума – **до 6 баллов.**

Задание 3. (25 баллов) **Неисправное устройство связи**
Туристическая группа попала в нештатную ситуацию, для выхода из которой потребовалась срочно связаться с органами МЧС. Штатное устройство связи средневолнового (160м) диапазона вышло из строя. Радиолюбитель, входивший в состав группы, определил неисправность – вышел из строя конденсатор переменной емкости с диапазоном регулировки 0.2-2 нФ. С собой такой запчасти не оказалось. В рюкзаках туристической группы ему удалось найти рулон фольги для запекания, широкий скотч, рулон стрейч-пленки, линейку, нож, ножницы, плоскогубцы, отвертку, синюю изоленту и несколько кусков проводов. Предложите туристу-радиолюбителю конструкцию конденсатора переменной емкости, изготовленную с применением перечисленных выше материалов и инструментов. Оцените электрические параметры получившегося изделия, учитывая электрическую постоянную ($8.854\cdot10^{-12}$ Ф/м), относительные диэлектрические проницаемости воздуха (~1.00) и полиэтилена (2.25), другие данные для расчётов можно взять из общих соображений.

Решение

Любой конденсатор представляет собой перекрывающиеся изолированные друг от друга пластины проводящего материала, которые предназначены для накопления заряда. Существует множество конструкций конденсаторов, но для простоты расчёта рассмотрим конденсатор с плоской структурой. Ёмкость такого конденсатора определяется формулой:

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}, \qquad (1)$$

где ε – относительная диэлектрическая проницаемость среды,
ε_0 – электрическая постоянная,
S – площадь перекрытия пластин,
d – расстояние между пластинами.

По формуле видно, что ёмкость конденсатора можно изменять путём замены диэлектрика, изменением площади перекрытия и изменением расстояния между обкладками. Реализуем конструкцию, в которой меняется площадь.

Толщина стрейч-плёнки сравнима с толщиной фольги, порядка 30 мкм. Сделаем изолятор толщиной в 3 слоя плёнки. Будем считать, что общая толщина изолятора примерно 100 мкм = 0,1 мм. Для выбранной толщины изолятора рассчитаем необходимую площадь пластин. Из формулы (1) выразим площадь S:

$$S = \frac{Cd}{\varepsilon\varepsilon_0}. \qquad (2)$$

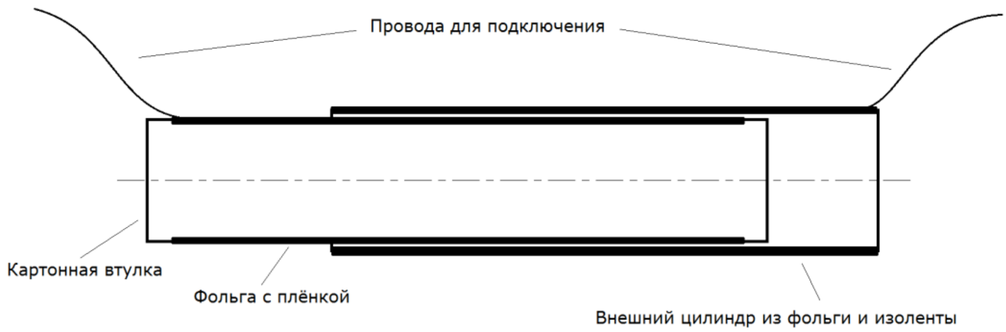
$$S_{\min} = \frac{0,2\cdot10^{-9}Ф\cdot0,1\cdot10^{-3}м}{2,25\cdot8,854\cdot10^{-12}Ф/м} = \frac{0,2\cdot0,1}{2,25\cdot8,854}м^2 = 0,001м^2 = 10см^2, \qquad (3)$$

$$S_{\max} = 10S_{\min} = 100см^2, \qquad (4)$$

В качестве каркаса для конденсатора будем использовать картонную трубку, на которую намотана фольга. Оценим внешний диаметр картонной трубки как 2,5 см, а её длину 25 см. Тогда площадь поверхности трубки будет

$$S = \pi \cdot d \cdot L = \pi \cdot 2{,}5см \cdot 25см = 196см^2 \approx 2дм^2. \quad (2)$$

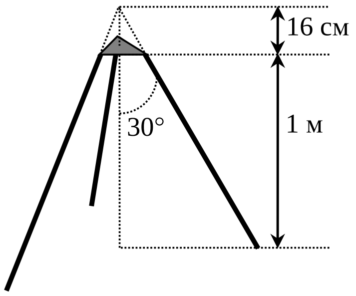
Эта площадь превышает необходимую, трубка в качестве каркаса подойдёт.
Аккуратно размотаем фольгу и освободим трубку. Далее на этой трубке оставим один слой фольги. Чтобы она не размоталась, прихватим края изолентой. К одному из краёв трубки присоединим на ту же самую изоленту провод. Провод можно зачистить ножницами/ножом/пассатижами. Заизолируем всю поверхность фольги плёнкой в несколько слоёв. За счёт свойств плёнки она цепляется сама за себя и не требует какой-то дополнительной фиксации. Поверх плёнки сделаем ещё один слой фольги, прикрепим проводок и обмотаем изолентой либо плёнкой (этот внешний слой должен иметь некоторую жёсткость). Второй слой из фольги и изолятора делается так, чтобы он мог свободно перемещаться вдоль оси цилиндра. Эскиз конструкции конденсатора представлен на рисунке ниже.



При надевании второго слоя на трубку ёмкость конденсатора увеличивается, при вытаскивании уменьшается. Определим «чувствительность» такого конденсатора. Максимальная ёмкость достигается при полном надевании второго слоя на трубку. Учтём, что всё-таки между изолятором трубки и фольгой второго слоя может быть дополнительный зазор и для достижения ёмкости 2 нФ нужно полностью надеть его. Тогда изменение ёмкости при смещении на 1 см будет: 2 нФ / 25 см = 0,08 нФ/см. Это довольно хорошее значение, можно достаточно точно настроить приёмник.

Рекомендуемые баллы
Знание формулы ёмкости плоского конденсатора **– до 5 баллов**
Произведён расчёт площади/расстояния для получения необходимой ёмкости **– до 5 баллов**
Идея и описание процесса изготовления конденсатора **– до 10 баллов**
Приведены пояснительные рисунки **– до 5 баллов**

Задание 4. (25 баллов) **Выравнивание штатива**
Любитель астрономии собирается установить телескоп на штатив, имеющий форму симметричного треножника, как показано на Рисунке 1a. Угол между опорами штатива и его вертикальной осью составляет 30°, высота штатива до плоской площадки – 1 м. Поверхность, на которой установлен штатив, не совсем горизонтальна. Ориентацию площадки штатива можно контролировать с помощью установленного на ней пузырькового уровня, который представляет собой капсулу с жидкостью и воздушным пузырьком внутри (Рисунок 1b). Горизонтальному положению площадки соответствовало бы расположение пузырька в центре капсулы, однако он смещен на 1 см в направлении оси *y*, как показано на Рисунке 1b. Опоры штатива – телескопические, длину каждой из опор можно увеличивать (уменьшить нельзя). Какое минимальное изменение суммарной длины опор штатива позволит привести площадку в горизонтальное положение?



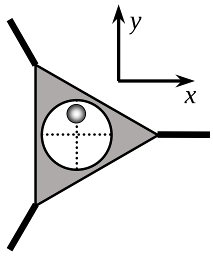


Рисунок 1. Треножник и пузырьковый уровень

Решение

Для горизонтального выравнивания площадки, центр капсулы пузырькового уровня нужно сместить в то положение, где находится пузырек, то есть на 1 см вдоль оси y. При этом, перемещение должно быть произведено таким образом, чтобы одна из опор штатива не изменила своей длины. Иначе суммарное увеличение длины опор не будет минимальным, поскольку все опоры возможно укоротить на одинаковую длину без изменения наклона площадки.

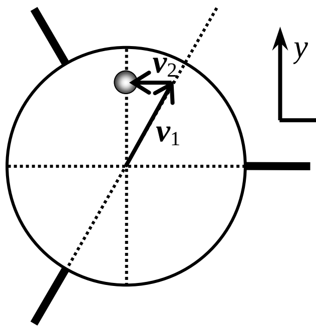


Рисунок 1. Перемещение центра пузырькового уровня к пузырьку посредством удлинения двух опор

Векторы перемещения центра пузырькового уровня к пузырьку показаны на Рисунке 1. Компонента вектора $\vec{v}_1$ вдоль оси y должна быть равна 1 см, тогда его длина составит

$$L_1 = \frac{1\,\text{см}}{\cos 30^\circ} = 1.15\ \text{см}\ .$$

Длина вектора $\vec{v}_2$:

$$L_2 = L_1 \cdot \sin 30^\circ = 0.58\ \text{см}.$$

Полученными длинами L_1, L_2 определяются углы поворота вертикальной оси штатива, которые необходимо скомпенсировать удлинением опор. Если бы пузырьковый уровень был достаточно большим и плоским для точных измерений, то значения углов давались бы формулами

$$\varphi_1 = arctg\left(\frac{L_1}{H_0}\right) = 0.0115\ \text{рад} = 0.66^\circ,$$

$$\varphi_2 = arctg\left(\frac{L_2}{H_0}\right) = 0.0058\ \text{рад} = 0.33^\circ.$$

В настоящей задаче точность исходных данных такова, что синусы и тангенсы таких малых углов, как φ_1 и φ_2, можно принять равными самим углам, выраженным в радианах. С точностью до двух и даже трех значащих цифр, значения не меняются:

$$\varphi_1 = \frac{L_1}{H_0} = 0.0115 \text{ рад} = 0.66°,$$
$$\varphi_2 = \frac{L_2}{H_0} = 0.0058 \text{ рад} = 0.33°.$$

В формулах выше H_0 = 1 м – это высота, на которой расположен пузырьковый уровень.

В силу малости углов, будем считать, что расчет коррекции каждого из них можно провести, принимая второй из углов равным нулю. Рассматриваемые углы совпадают с углами отклонения поверхности, на которой установлен штатив, от горизонтали, как показано на Рисунке 2.

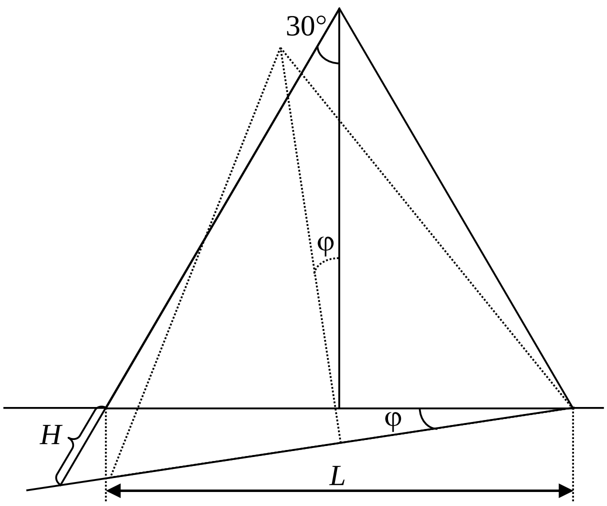


Рисунок 2. Схема компенсации отклонения штатива от вертикального положения. Сплошными линиями показано вертикальное положение штатива с удлиненной опорой, прерывистыми линиями – начальное положение штатива. H – величина удлинения опоры.

На Рисунке 2 угол φ - это угол отклонения оси штатива от вертикали, равный углу наклона горизонтальной плоскости, на которой установлен штатив. Длина *L* для штатива, имеющего форму пирамиды – это высота треугольного основания, образованного нижними концами опор (поскольку при удлинении одной из опор штатив вращается вокруг оси, соединяющей концы двух других опор). В настоящей задаче

$$L = \frac{3}{2} \cdot \text{tg}(30°) \cdot 1.16 \text{ м} = 1.00 \text{ м}.$$

Можно показать, что длина *H* на Рисунке 2 даётся формулой

$$H = \frac{L \sin\varphi}{\left(1 - \sin(\varphi) \cdot \text{tg}(30°)\right)\cos(30°)}.$$

Снова, синусы углов φ_1 и φ_2 в этой формуле можно принимать равными самим углам, выраженным в радианах. Получается, что

$$H(\varphi_1) = 1.35 \text{ см}, H(\varphi_2) = 0.67 \text{ см}, H(\varphi_1) + H(\varphi_2) = 2.02 \text{ см}.$$

Ответ: суммарное удлинение опор составит 2.0 см.

Рекомендуемые баллы:
Понимание принципа работы пузырькового уровня – **до 5 баллов**.
Расчет углов, на которые нужно сместить ось штатива – **до 10 баллов**.

Установление связи между поворотом оси штатива и удлинением опор – **до 6 баллов**.
Получение правильного ответа на основании предыдущих результатов **- до 4 баллов**.

Время выполнения задания – 180 минут. Максимальное количество баллов – 100

Задание 1. (25 баллов) **Черная дыра в газовом облаке**

Черная дыра массы $M = 2\cdot10^{31}$ кг, которую можно рассматривать как точечный источник гравитационного поля, движется через однородное облако молекулярного водорода с постоянной скоростью, равной 20 км/с. Какую массу вещества сможет поглотить эта черная дыра на пути длиной в один световой год (расстояние, которое свет проходит за год), если она захватывает молекулы водорода, приближающиеся на расстояния менее 300 км? Потенциальную энергию молекулы водорода массы m в гравитационном поле «дыры» рассчитывать по формуле $E_{пот} = -G\cdot M\cdot m/R$, где R – расстояние до её центра, $G = 6.67430\cdot10^{-11}$ м^{3}кг$^{-1}$с$^{-2}$ – гравитационная постоянная. Скорость света принять равной $3\cdot10^8$ м/с. Концентрация молекул водорода в облаке равна 10^4 частиц/см^3. Изменением гравитационного поля, связанным с увеличением массы черной дыры, пренебречь.

Решение

Пусть черная дыра движется сквозь газовое облако по прямой. Эту прямую можно рассмотреть в качестве оси цилиндра, длина которого равна 1 световому году, а радиус равен некоторому критическому значению $R_{крит}$. Молекулы водорода, расположенные внутри этого цилиндра, будут захвачены «дырой», тогда как молекулы вне цилиндра захвачены не будут. Ниже, найдём радиус цилиндра $R_{крит}$.

Для того, чтобы проще описать взаимодействие частиц облака с центром притяжения, выберем «дыру» в качестве начала координат системы отсчета, движущейся со скоростью V = 10 км/с. В этой системе отсчета черная дыра покоится, тогда как вещество облака движется мимо неё со скоростью v_0 = 10 км/с. Молекулы водорода будут приближаться к «дыре» за счет гравитационного притяжения.

Отметим, что несмотря на очень низкую плотность, молекулярное облако в космических масштабах можно рассматривать как сплошную среду (идеальный газ), поскольку длина свободного пробега молекул водорода составляет около 0.05 астрономических единицы, что мало по сравнению с характерными для космоса расстояниями. Однако, в данной задаче скорость движения молекул относительно «дыры» намного более высока, чем скорость теплового движения молекул (0.8 км/с при температуре облака, равной 50 K). Это значит, что близкие молекулы водорода можно считать покоящимися друг относительно друга, вокруг центра «дыры» они будут двигаться одинаково, и свойства сплошной среды не проявятся. Таким образом, ниже рассмотрим движение молекулы относительно черной дыры так, как если бы оно происходило в вакууме.

В качестве модельного представления, задача предполагает, что на расстояниях менее 300 км от центра черной дыры описывать движение частиц без взаимодействия с окружением уже нельзя, из-за высокой плотности вещества. Поэтому условие задачи предполагает, что на меньших расстояниях черная дыра «автоматически» захватывает частицы. На Рисунке 1 схематически показана траектория молекулы, избегающей захвата.

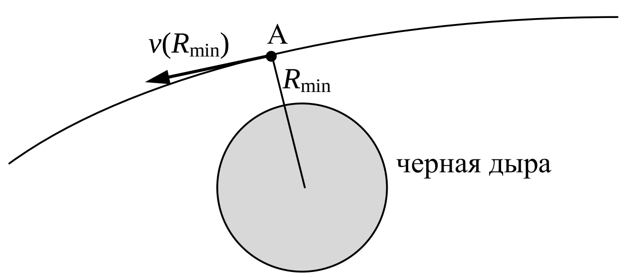


Рисунок 1. Минимальное расстояние от молекулы до черной дыры

При движении молекулы в гравитационном поле будут сохраняться полная механическая энергия, а также момент импульса. На большом расстоянии от центра притяжения потенциальная энергия $E_{пот}$ стремится к нулю, тогда как кинетическая энергия далёких молекул массы m в системе отсчета, неподвижной относительно черной дыры, даётся формулой

$$E_{кин} = mv_0^2/2.$$

Момент импульса можно рассчитать как векторное произведение радиус-вектора, соединяющего молекулу с центром «дыры», и вектора скорости частицы относительно нее. На больших расстояниях

$$\vec{M} = m\cdot\left(\vec{R}\times\vec{v}_0\right)$$

Вектор $\vec{M}$ сохраняет свои значение и направление, будучи перпендикулярным к векторам $\vec{R}$ и $\vec{v}_0$, откуда следует, что движение молекулы вокруг «дыры» всё время происходит в одной и той же плоскости. Значение модуля момента импульса

$$\left|\vec{M}\right| = m\cdot\left|\vec{R}\right|\cdot\left|\vec{v}_0\right|\cdot\sin\left(\vec{R}\wedge\vec{v}_0\right) = m\cdot v_0\cdot b,$$

где b – начальное расстояние между молекулой и осью x, показанное на Рисунке 2.

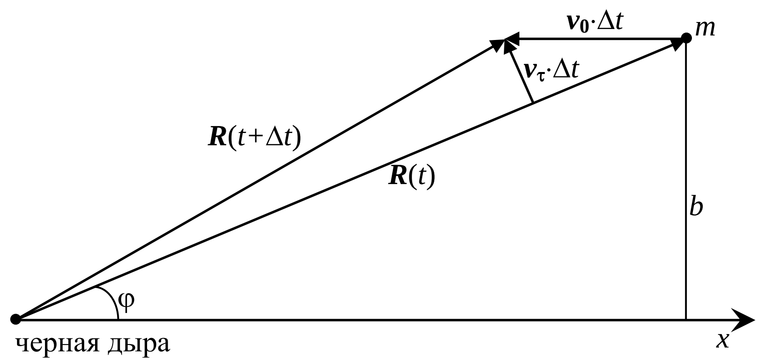


Рисунок 2. К расчету момента импульса молекулы на большом расстоянии от черной дыры.

Без использования векторной формы, момент импульса молекулы можно получить через произведение расстояния R и компоненты вектора $\vec{v}_0$, направленной перпендикулярно вектору $\vec{R}$. Иллюстрация такого подхода приведена на Рисунке 2. Компонента скорости v_τ фактически представляет собой движение вдоль участка окружности, радиус которой совпадает с текущим расстоянием R от центра притяжения до молекулы:

$$\left|\vec{M}\right| = m\cdot R\cdot v_\tau = m\cdot R\cdot v_0\cdot\sin\varphi = m\cdot R\cdot v_0\cdot(b / R) = m\cdot v_0\cdot b.$$

На Рисунке 2 $R(t+\Delta t) \approx R(t)$, если расстояние R велико по сравнению с $v_0\cdot\Delta t$.

В точке А, ближайшей к центру черной дыры (Рисунок 1), вектор скорости направлен перпендикулярно радиус-вектору. Это значит, что момент импульса здесь равен $m\cdot v\cdot R_{min}$, так что

$$v\left(R_{min}\right)\cdot R_{min} = v_0\cdot b.$$

Закон сохранения энергии при этом даст

$$\frac{mv\left(R_{min}\right)^2}{2} - G\frac{M\cdot m}{R_{min}} = \frac{mv_0^2}{2}.$$

Пусть R_{min} совпадает с радиусом захвата молекул «дырой» (300 км). Соответствующее значение b в этом случае совпадёт с критическим радиусом цилиндра $R_{крит}$, внутри которого находятся захватываемые молекулы. Таким образом

$$v(R_{min}) = \sqrt{v_0^2 + \frac{2GM}{R_{min}}} = 94075 \text{ км/с},$$

откуда

$$R_{крит} = \frac{v(R_{min}) \cdot R_{min}}{v_0} = \sqrt{R_{min}^2 + \frac{2GM \cdot R_{min}}{v_0^2}} = 1.41 \cdot 10^6 \text{ км}.$$

Объём цилиндра, внутри которого будут поглощены молекулы:

$$V = \pi \cdot R_{крит}^2 \cdot (1 \text{ св. год}) = 5.9 \cdot 10^{25} \text{ км}^3.$$

Использовано значение 1 св. год = $9.46 \cdot 10^{12}$ км. Массу поглощенного вещества получаем умножением объёма на плотность, с учетом того, что масса молекулы водорода равна 2 а.е.м., то есть $3.32 \cdot 10^{-27}$ кг. В результате $M_{погл} = 2.0 \cdot 10^{18}$ кг. Эта масса очень мала по сравнению с массой черной дыры, так что изменением гравитационной силы в процессе движения при решении задачи можно было пренебречь.

Ответ: $M_{погл} = 2.0 \cdot 10^{18}$ кг.

Задание 2. (25 баллов) **Яркость Венеры**

Принять, что Земля и Венера вращаются вокруг Солнца по круговым орбитам с радиусами $R_З = 147 \cdot 10^6$ км, $R_В = 108 \cdot 10^6$ км. Считать, что яркость Венеры пропорциональна освещенной площади её диска, видимого с Земли. Построить график зависимости яркости Венеры от её расстояния до Земли, позволяющий определить положение максимума яркости. Оценить положение этого максимума с точностью, не худшей, чем 0.1 астрономической единицы ($0.1 \cdot R_З$). Считать, что освещенная часть поверхности Венеры, как и часть поверхности, видимая с Земли, представляют собой полусферы, ограниченные плоскими сечениями α и β, проходящими через центр Венеры. Освещенную площадь диска Венеры, видимого с Земли, рассчитывать по формуле $S = \pi \cdot r^2 \cdot (1 - \cos(\varphi))/2$, где φ - угол между сечениями α и β, r – радиус видимого диска.

Решение

Для изучения яркости Венеры, рассмотрим Рисунок 1. Буквой S на Рисунке обозначена область на поверхности Венеры, которая одновременно освещена Солнцем и видима с Земли. Также, на Рисунке 1 показаны сечения α и β, пересекающиеся под углом φ. Проекция области S на диск Венеры, обращенный к Земле, имеет форму месяца, который схематически показан на том же Рисунке. Именно площадь этого месяца, как доля от площади диска Венеры, даётся формулой $S = (1 - \cos(\varphi))/2$, приведенной в условии задачи.

На Рисунке 1, угол φ является суммой углов φ_1 и φ_2. В свою очередь, угол φ_1 равен $90° - \gamma_1$, тогда как $\gamma_1 = 90° - \varphi_В$. Таким образом,

$$\varphi_1 = 90° - (90° - \varphi_В) = \varphi_В.$$

Аналогично,

$$\varphi_2 = 90° - (90° - \varphi_З) = \varphi_З.$$

Получили, что

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_З + \varphi_В.$$

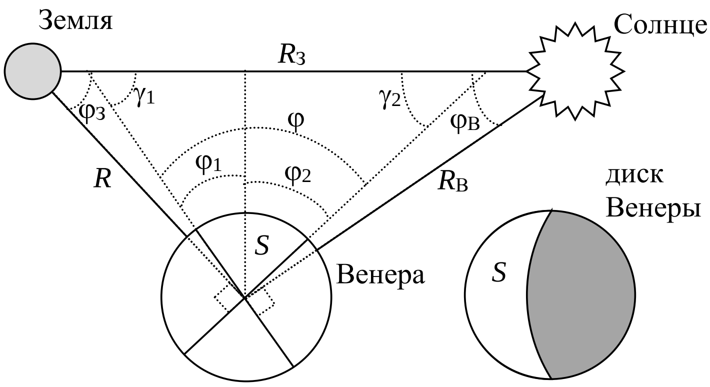


Рисунок 1. Положение и освещенность Венеры.

Яркость L Венеры, видимой с Земли, пропорциональна величине

$$S = (1 - \cos(\varphi))/2 = (1 - \cos(\varphi_З + \varphi_В))/2.$$

Одновременно, яркость L будет пропорциональна телесному углу Ω, который Венера занимает на небе. Этот угол равен площади сечения Венеры, проходящего через её центр, деленной на квадрат расстояния до Венеры и на 4π. Площадь сечения – константа. Квадрат расстояния даётся формулой

$$R^2 = R_З^2 + R_В^2 - 2R_З R_В \cdot \cos(\varphi_В).$$

Согласно условию задачи, положение максимума яркости нужно определить с точностью до $0.1 \cdot R_З$. Поэтому, будем в дальнейшем выражать радиус в единицах $R_З$. То есть

$$(R/R_З)^2 = 1 + (R_В/R_З)^2 - 2(R_В/R_З) \cdot \cos(\varphi_В).$$

В целом,

$$L = \text{const} \cdot \frac{1 - \cos(\varphi_В + \varphi_З)}{(R/R_З)^2} = \text{const} \cdot \frac{1 - \cos(\varphi_В + \varphi_З)}{1 + (R_В/R_З)^2 - 2(R_В/R_З) \cdot \cos(\varphi_В)}. \quad (*)$$

Углы $\varphi_В$ и $\varphi_З$ связаны соотношением

$$R \cdot \sin(\varphi_З) = R_В \cdot \sin(\varphi_В) \Rightarrow \sin(\varphi_З) = \frac{R_В}{R} \cdot \sin(\varphi_В).$$

При известных $\varphi_В$ и R, можно рассчитывать $\varphi_З$ по формуле

$$\varphi_З = \arcsin\left(\frac{R_В}{R} \cdot \sin(\varphi_В)\right),$$

после чего построить зависимость $L(R)$ по формуле (*). С другой стороны, можно учесть следующие соотношения:

$$\cos(\varphi_В + \varphi_З) = \cos\varphi_В \cdot \cos\varphi_З - \sin\varphi_В \cdot \sin\varphi_З,$$

$$R \cdot \cos\varphi_З = R_З - R_В \cdot \cos\varphi_В \Rightarrow \cos\varphi_З = \frac{1 - (R_В/R_З) \cdot \cos\varphi_В}{(R/R_З)} \cdot$$

После подстановки этих соотношений в формулу (*):

$$L = \text{const} \cdot \frac{(R/R_З) + (R_В/R_З) - \cos(\varphi_В)}{(R/R_З)^3}. \quad (**)$$

Для того, чтобы найти максимум L, можно продифференцировать L по ($R/R_З$) и потребовать равенства этой производной нулю. Такое дифференцирование представляется слишком сложным на школьном уровне, поэтому в задаче предложено оценить положение максимума с помощью графика. При варьировании ($R/R_З$) нужно учитывать, что

$$\cos(\varphi_В) = \frac{1 + (R_В/R_З)^2 - (R/R_З)^2}{2(R_В/R_З)}.$$

При получении таблицы значений, учтём, что минимальное возможное значение $R/R_З$ равно 1 - $R_В/R_З$ = 0.27.

Таблица. Яркость Венеры в зависимости от расстояния до Земли

$R/R_З$	$\cos(\varphi_В)$	L/const
0.3	0.99	1.73
0.35	0.96	2.78
0.4	0.94	3.04
0.45	0.91	3.00
0.5	0.88	2.84
0.55	0.84	2.65

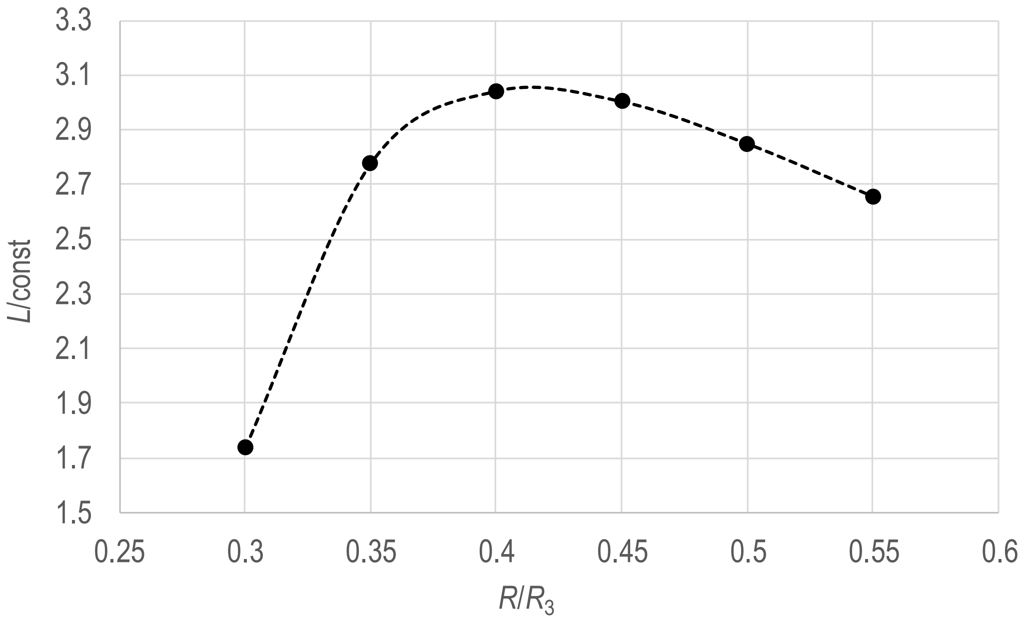


Рисунок 2. Яркость Венеры в зависимости от расстояния до Земли.

Из Таблицы и Рисунка 2 видно, что максимум яркости Венеры достигается на расстоянии $R/R_З \approx 0.4$, что является ответом задачи.

Ответ: $R(L_{макс})$ = 0.4 астрономических единиц (а.е.)

Задание 3. (25 баллов) **Неисправное устройство связи**

Туристическая группа попала в нештатную ситуацию, для выхода из которой потребовалась срочно связаться с органами МЧС. Штатное устройство связи средневолнового (160м) диапазона вышло из строя. Радиолюбитель, входивший в состав группы, определил неисправность – вышел из строя конденсатор переменной емкости с диапазоном регулировки 0.2-2 нФ. С собой такой запчасти не оказалось. В рюкзаках туристической группы ему удалось найти рулон фольги для запекания, широкий скотч, рулон стрейч-пленки, линейку, нож, ножницы, плоскогубцы, отвертку, синюю изоленту и несколько кусков проводов. Предложите туристу-радиолюбителю конструкцию конденсатора переменной емкости, изготовленную с применением перечисленных выше материалов и инструментов. Оцените электрические параметры получившегося изделия, учитывая электрическую постоянную (8.854·10−12 Ф/м), относительные диэлектрические проницаемости воздуха (~1.00) и полиэтилена (2.25), другие данные для расчётов можно взять из общих соображений.

Решение

Любой конденсатор представляет собой перекрывающиеся изолированные друг от друга пластины проводящего материала, которые предназначены для накопления заряда. Существует множество конструкций конденсаторов, но для простоты расчёта рассмотрим конденсатор с плоской структурой. Ёмкость такого конденсатора определяется формулой:

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}, \qquad (1)$$

где ε – относительная диэлектрическая проницаемость среды,
ε_0 – электрическая постоянная,
S – площадь перекрытия пластин,
d – расстояние между пластинами.

По формуле видно, что ёмкость конденсатора можно изменять путём замены диэлектрика, изменением площади перекрытия и изменением расстояния между обкладками. Реализуем конструкцию, в которой меняется площадь.

Толщина стрейч-плёнки сравнима с толщиной фольги, порядка 30 мкм. Сделаем изолятор толщиной в 3 слоя плёнки. Будем считать, что общая толщина изолятора примерно 100 мкм = 0,1 мм. Для выбранной толщины изолятора рассчитаем необходимую площадь пластин. Из формулы (1) выразим площадь S:

$$S = \frac{Cd}{\varepsilon\varepsilon_0}. \qquad (2)$$

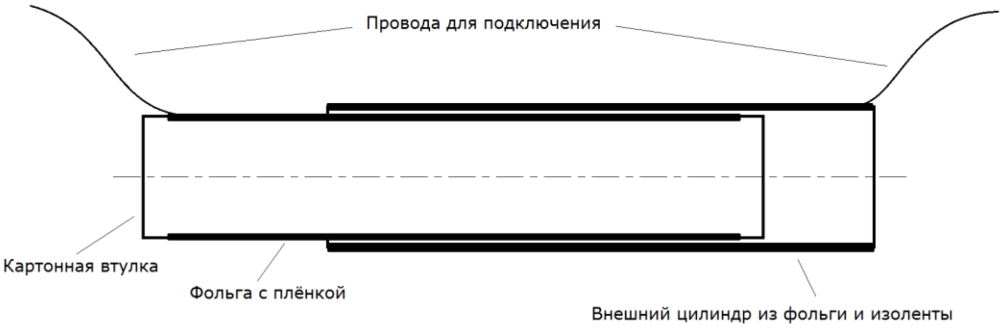
$$S_{\min} = \frac{0,2\cdot10^{-9}\text{Ф}\cdot 0,1\cdot10^{-3}\text{м}}{2,25\cdot 8,854\cdot10^{-12}\text{Ф/м}} = \frac{0,2\cdot0,1}{2,25\cdot8,854}\text{м}^2 = 0,001\text{м}^2 = 10\text{см}^2, \qquad (3)$$

$$S_{\max} = 10 S_{\min} = 100\text{см}^2, \qquad (4)$$

В качестве каркаса для конденсатора будем использовать картонную трубку, на которую намотана фольга. Оценим внешний диаметр картонной трубки как 2,5 см, а её длину 25 см. Тогда площадь поверхности трубки будет

$$S = \pi\cdot d\cdot L = \pi\cdot 2,5\text{см}\cdot 25\text{см} = 196\text{см}^2 \approx 2\text{дм}^2. \qquad (2)$$

Эта площадь превышает необходимую, трубка в качестве каркаса подойдёт.
Аккуратно размотаем фольгу и освободим трубку. Далее на этой трубке оставим один слой фольги. Чтобы она не размоталась, прихватим края изолентой. К одному из краёв трубки присоединим на ту же самую изоленту провод. Провод можно зачистить ножницами/ножом/пассатижами. Заизолируем всю поверхность фольги плёнкой в несколько слоёв. За счёт свойств плёнки она цепляется сама за себя и не требует какой-то дополнительной фиксации. Поверх плёнки сделаем ещё один слой фольги, прикрепим проводок и обмотаем изолентой либо плёнкой (этот внешний слой должен иметь некоторую жёсткость). Второй слой из фольги и изолятора делается так, чтобы он мог свободно перемещаться вдоль оси цилиндра. Эскиз конструкции конденсатора представлен на рисунке ниже.



При надевании второго слоя на трубку ёмкость конденсатора увеличивается, при вытаскивании уменьшается. Определим «чувствительность» такого конденсатора. Максимальная ёмкость достигается при полном надевании второго слоя на трубку. Учтём, что всё-таки между изолятором трубки и фольгой второго слоя может быть дополнительный зазор и для достижения ёмкости 2 нФ нужно полностью надеть его. Тогда изменение ёмкости при смещении на 1 см будет: 2 нФ / 25 см = 0,08 нФ/см. Это довольно хорошее значение, можно достаточно точно настроить приёмник.

Рекомендуемые баллы

Знание формулы ёмкости плоского конденсатора **– до 5 баллов**

Произведён расчёт площади/расстояния для получения необходимой ёмкости **– до 5 баллов**

Идея и описание процесса изготовления конденсатора **– до 10 баллов**

Приведены пояснительные рисунки **– до 5 баллов**

Задание 4. (25 баллов) **Световая волна на плоской границе**

Космическая вспышка порождает световую волну, фронт которой имеет форму сферы и распространяется во все стороны со скоростью света с. Эта волна пересекает плоскую границу пылевого облака, при этом линия пересечения границы облака сферическим фронтом волны представляет собой кольцо радиуса *r*. С какой скоростью будет увеличиваться значение *r* в момент, когда *r* станет равным 0.1 от радиуса сферического фронта волны?

Решение

Пересечение сферического фронта волны с плоской границей показано на Рисунке.

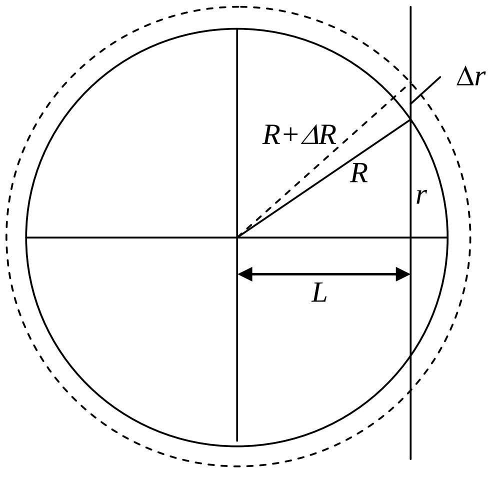


Рисунок. Схема пересечения сферической волны с плоской границей

Из Рисунка видно, что радиус кольца, представляющего собой пересечение сферы с плоской границей –

$$r = \sqrt{R^2 - L^2},$$

где L – постоянное расстояние между плоскостью и центром сферы. Связать скорости изменения радиусов $R(t)$ и $r(t)$ теперь можно дифференцированием по времени t:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{2R}{2\sqrt{R^2 - L^2}} \cdot \frac{dR}{dt} = \frac{R}{r} \cdot \frac{dR}{dt}.$$

Учитывая, что скорость распространения световой волны $dR/dt = c = 3 \cdot 10^8$ м/с, и что $r = 0.1 \cdot R$, получаем

$$\frac{dr}{dt} = 10 \cdot c = 3 \cdot 10^9 \text{ м/с.}$$

Без дифференцирования, можно использовать малые приращения координат и времени:

$$r^2 = R^2 - L^2 \Rightarrow (r + \Delta r)^2 - r^2 = 2r \cdot \Delta r + (\Delta r)^2 = (R + \Delta R)^2 - R^2 = 2R \cdot \Delta R + (\Delta R)^2.$$

Здесь можно пренебречь квадратами малых приращений, и получить

$$r \cdot \Delta r = R \cdot \Delta R \Rightarrow \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{R}{r} \cdot \frac{\Delta R}{\Delta t} = \frac{R}{r} \cdot c,$$

что совпадает с результатом дифференцирования.

Отметим, что изменение радиуса r со скоростью, превышающей скорость света, вполне допустимо, поскольку переноса энергии вместе с ним не происходит.

Ответ: $3 \cdot 10^9$ м/с.