Время выполнения задания – 180 минут. Максимальное количество баллов – 100

11 класс

Задание 1. (20 баллов)

Какие различные тройки неотрицательный целых чисел (x, y, z) удовлетворяют всем следующим условиям:

$$(\sim x \ \& \ z) \mid (x \ \& \ y) = 19528$$
$$\sim z \ \& \ (x \mid y) = 31945$$
$$x \ \& \ (y \oplus z) = 19548$$
$$x \oplus (y \mid z) = 12417$$

если дополнительно известно, что на каждое число выделяется 2 байта памяти.
В качестве ответа запишите количество подходящих различных троек.

*(в данной задаче используются битовые операции: ~ инверсия, & И, | ИЛИ, Å исключающее ИЛИ)

<u>РЕШЕНИЕ:</u>

$$(\sim x \ \& \ z) \mid (x \ \& \ y) = 19528 \qquad (1)$$
$$\sim z \ \& \ (x \mid y) = 31945 \qquad (2)$$
$$x \ \& \ (y \oplus z) = 19548 \qquad (3)$$
$$x \oplus (y \mid z) = 12417 \qquad (4)$$

$19528 = 0100110001001000_2$
$31945 = 0111110011001001_2$
$19548 = 0100110001011100_2$
$12417 = 0011000010000001_2$

Обратим внимание, что значения некоторых битов совпадает, тогда можно рассмотреть только 4 случая:
<u>1 случай</u> (рассмотрим 1, 7, 8, 11 и 15 биты):

$$(\sim x \ \& \ z) \mid (x \ \& \ y) = 0 \qquad (1.1)$$
$$\sim z \ \& \ (x \mid y) = 0 \qquad (2.1)$$
$$x \ \& \ (y \oplus z) = 0 \qquad (3.1)$$
$$x \oplus (y \mid z) = 0 \qquad (4.1)$$

Тогда (1.1) можно расписать:

$$\sim x \ \& \ z = 0 \qquad (1.1.1)$$
$$x \ \& \ y = 0 \qquad (1.1.2)$$

Пусть x = 1, подставим в (1.1.2), получим 1 & y = 0, следовательно y = 0. Тогда получаем ~z & (1 | 0) = 0 (2.1) из чего можно сделать вывод, что ~z = 0, тогда z = 1. Но тогда уравнение (3.1) неверное $1 \ \& \ (0 \oplus 1) \neq 0$, получили противоречие, значит изначальное предположение, что x = 1, было неверным.
Тогда получаем, что x = 0, проанализируем (1.1.1) и заметим, что z = 0. Рассмотрим 1 & (0 | y) = 0 (2.1), следовательно y = 0. Проверяем все условия:

$$1 \ \& \ 0 = 0 \qquad (1.1.1)$$
$$0 \ \& \ y = 0 \qquad (1.1.2)$$
$$1 \ \& \ (0 \mid 0) = 0 \qquad (2.1)$$
$$0 \ \& \ (0 \oplus 0) = 0 \qquad (3.1)$$
$$0 \oplus (0 \mid 0) = 0 \qquad (4.1)$$

Противоречий нет, тогда делаем вывод о том, что получилось однозначно определить значения на 1, 7, 8, 11 и 15 битах: x = y = z = 0
Получили (знак ? – неизвестный бит):
x = 0?????00??0???0?$_2$
y = 0?????00??0???0?$_2$
z = 0?????00??0???0?$_2$

<u>2 случай</u> (рассмотрим 2, 5, 6, 10 и 13 биты):

$$(\sim x \ \& \ z) \mid (x \ \& \ y) = 1 \qquad (1.2)$$
$$\sim z \ \& \ (x \mid y) = 1 \qquad (2.2)$$
$$x \ \& \ (y \oplus z) = 1 \qquad (3.2)$$
$$x \oplus (y \mid z) = 0 \qquad (4.2)$$

Тогда можно расписать два условия (1.2) и (2.2):

$\sim z = 1$ (2.2.1)

$x \mid y = 1$ (2.2.2)

$x = 1$ (3.2.1)

$y \oplus z = 1$ (3.2.2)

Получаем, что z = 0, а x = 1. Подставим полученные значения в (1.2): (0 & 0) | (1 & y) = 1, значит y = 1. Проверим:

$(0 \& 0) \mid (1 \& 1) = 1$ (1.2)

$1 \& (1 \mid 1) = 1$ (2.2)

$1 \& (1 \oplus 0) = 1$ (3.2)

$1 \oplus (1 \mid 0) = 0$ (4.2)

Противоречий нет, тогда делаем вывод о том, что получилось однозначно определить значения на 2, 5, 6, 10 и 13 битах: x = y = 1, z = 0.

Получили (знак ? – неизвестный бит):

$x = 01??1100?10?1?0?_2$

$y = 01??1100?10?1?0?_2$

$z = 00??0000?00?0?0?_2$

<u>3 случай</u> (рассмотрим 12 и 14 биты):

$(\sim x \& z) \mid (x \& y) = 0$ (1.3)

$\sim z \& (x \mid y) = 0$ (2.3)

$x \& (y \oplus z) = 1$ (3.3)

$x \oplus (y \mid z) = 0$ (4.3)

Можно расписать подробнее на случаи условия (1.3) и (3.3):

$\sim x \& z= 0$ (1.3.1)

$x \& y = 0$ (1.3.2)

$x = 1$ (3.3.1)

$y \oplus z = 1$ (3.3.2)

Получаем, что x = 1, а из (1.3.2) можно сделать вывод, что y = 0, тогда из (3.3.2) z = 1. Проверим все условия:

$(0 \& 1) \mid (1 \& 0) = 0$ (1.3)

$0 \& (1 \mid 0) = 0$ (2.3)

$1 \& (0 \oplus 1) = 1$ (3.3)

$1 \oplus (0 \mid 1) = 0$ (4.3)

Противоречий нет, тогда делаем вывод о том, что получилось однозначно определить значения на 12 и 14 битах: x = 1, y = 0, z = 1.

Получили (знак ? – неизвестный бит):

$x = 01??1100?101110?_2$

$y = 01??1100?100100?_2$

$z = 00??0000?001010?_2$

<u>4 случай</u> (3, 4, 9 и 16 биты):

$(\sim x \& z) \mid (x \& y) = 0$ (1.4)

$\sim z \& (x \mid y) = 1$ (2.4)

$x \& (y \oplus z) = 0$ (3.4)

$x \oplus (y \mid z) = 1$ (4.4)

Можно расписать (1.4) и (2.4):

$\sim x \& z = 0$ (1.4.1)

$x \& y = 0$ (1.4.2)

$\sim z = 1$ (2.4.1)

$x \mid y = 1$ (2.4.2)

Проанализируем (2.4.1), тогда получим, что z = 0. Подставим в (4.4) $x \oplus (y \mid 0) = 1$, тогда оно преобразуется в $x \oplus y = 1$, а это означает, что значение y всегда не равно x, следовательно оно однозначно определяется как y = ~x, подставим во все условия:

$$(\sim x \,\&\, 0) \mid (x \,\&\, \sim x) = 0 \qquad (1.4)$$
$$1 \,\&\, (x \mid \sim x) = 1 \qquad (2.4)$$
$$x \,\&\, (\sim x \oplus 0) = 0 \qquad (3.4)$$
$$x \oplus (\sim x \mid 0) = 1 \qquad (4.4)$$

Обратим внимание, что уравнение (1.4) всегда истинно так как ~x & 0 = 0 и x & ~x = 0, аналогично с (2.4), так как x | ~x = 1, а значит 1 & (x | ~x) всегда истинно.

Пусть x = 0:

(3.4) $0 \,\&\, (\sim 0 \oplus 0) = 0 \,\&\, 1 = 0$ верно

(4.4) $0 \oplus (\sim 0 \mid 0) = 0 \oplus 1 = 1$ верно

Тогда при x = 0, y = 1 и z = 0.

Пусть x = 1:

(3.4) $1 \,\&\, (\sim 1 \oplus 0) = 1 \,\&\, 0 = 0$ верно

(4.4) $1 \oplus (\sim 1 \mid 0) = 1 \oplus 0 = 1$ верно

Тогда при x = 1, y = 0 и z = 0.

Получили (знак ? – неизвестный бит):

$x = 01??1100?101110?_2$

$y = 01??1100?100100?_2$

$z = 0000000000010100_2$

Получается, что остается только 4 бита для перебора 0 и 1 у переменной x, так как переменная y найдется однозначно из значения x. Значит ответ $2^4 = 16$.

__РЕШЕНИЕ (2 вариант):__

Для каждого числа отведено 1 байт = 8 бит памяти, значит в двоичной системе счисления необходимо рассматривать числа длины 8.

$19528 = 0100110001001000_2$

$31945 = 0111110011001001_2$

$19548 = 0100110001011100_2$

$12417 = 0011000010000001_2$

Введем обозначения:

$$(\sim x \,\&\, z) \mid (x \,\&\, y) = 0100110001001000 \qquad (1)$$
$$\sim z \,\&\, (x \mid y) = 0111110011001001 \qquad (2)$$
$$x \,\&\, (y \oplus z) = 0100110001011100 \qquad (3)$$
$$x \oplus (y \mid z) = 0011000010000001 \qquad (4)$$

Рассмотрим таблицу истинности для данных выражений:

Номер строки	x	y	z	(1)	(2)	(3)	(4)	Кол-во повторений
1	0	0	0	0	0	0	0	1
2	0	0	1	1	0	0	1	2
3	0	1	0	0	1	0	1	2
4	0	1	1	1	0	0	1	2
5	1	0	0	0	1	0	1	2
6	1	0	1	0	0	1	0	1
7	1	1	0	1	1	1	0	1
8	1	1	1	1	0	0	0	1

В последнем столбце указано количество повторений для значений (1)-(4), значит, если встречается строка 1001 или 0101, тогда будет 2 варианта для значений переменных x, y, z, а во всех остальных случаях – единственное решение.

Осталось сопоставить значения строк первой таблицы и вычислить значения переменных:

(1)	(2)	(3)	(4)	x	Y	z	Номер строки в 1 таблице

0	0	0	0				1
1	1	1	0				7
0	1	0	1				3, 5
0	1	0	1				3, 5
1	1	1	0				7
1	1	1	0				7
0	0	0	0				1
0	0	0	0				1
0	1	0	1				3, 5
1	1	1	0				7
0	0	0	0				1
0	0	1	0				6
1	1	1	0				7
0	0	1	0				6
0	0	0	0				1
0	1	0	1				3, 5

Тогда получаем, что на 4х позициях по два варианта, ответ $2^4 = 16$.

ОТВЕТ:

16

КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ:

Полное решение	20 баллов
Доказали в каких битах каждой переменной может быть два варианта значения	17 баллов
Верно соотнесли значения каждого бита с таблицей	15 баллов
Правильно использовали логические операции и указали определения 1-8, возможное добавление частичных баллов за объяснение не всех пунктов	11 баллов
Правильно составлена таблица истинности для исходной системы	6 баллов
Правильно перевели числа в 2 систему счисления	1 балл
Отсутствует решение	0 баллов

Задание 2. (20 баллов)

Рассмотрим все пары целых чисел A и B, таких что 0 **≤** A, B < 1024.
Требуется подсчитать количество различных пар (A, B), таких что сумма A и B в двоичной системе счисления записывается ровно 10 битами (с ведущими нулями, если нужно) и является палиндромом. Пары (B, A) и (A, B) считаются одинаковыми.

РЕШЕНИЕ:

Количество способов представить число K в виде суммы двух неотрицательных чисел равно K + 1. Тогда ответ – это сумма всех палиндромов + количество палиндромов.
Количество палиндромов длины N в двоичной системе счисления:
$2^{(N+1)//2} = 2^5 = 32.$
Теперь будем фиксировать в палиндроме i-ый бит равный 1, тогда просто перебираем на 1 бит меньше, то есть получаем $2^{(N+1)//2\,-\,1} = 2^4 = 16$ палиндромов.
Каждый разряд, равный 1 вносит в итоговую сумму 2^i. Тогда для всех разрядов получаем $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{N-1} = 2^N - 1 = 1023.$ Следовательно итоговая сумма 1023 * 16 = 16368.
Осталось прибавить количество палиндромов 16368 + 32 = 16400.
Остается учесть случай четной суммы, так как только она не считается два раза, четной суммы столько же вариантов, сколько количество палиндромов, которые оканчиваются на 0 (начинаются на 0), а это 16 (как ранее посчитано), 16400+16 = 16416.
Теперь каждая пара посчитана два раза, следовательно ответ: 16416 / 2 = 8208.

ОТВЕТ:
8208

КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ:

Полное решение	20 баллов
Получили неверный ответ из-за арифметической ошибки	18 баллов
Вывели формулу для подсчета количества пар чисел (общую или отдельно для четных/нечетных)	10 баллов
Указано, что количество способов представить число К в виде суммы двух неотрицательных чисел это К+1	+2 балла
Написано, что необходимо искать сумму всех палиндромов + количество.	+2 балла
Отсутствует решение	0 баллов

Задание 3. (20 баллов)

Стрелка Пирса – логическая операция, которая дает истину, только если оба операнда ложны. На письме обозначается как $\downarrow$. Дано логическое высказывание $(a \wedge b) \vee (a \rightarrow c)$, выразите его используя только стрелку Пирса и скобки.

a	b	$a \downarrow b$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Таблица истинности для стрелки Пирса

РЕШЕНИЕ:
Распишем:
$(a \wedge b) \vee (a \rightarrow c) = (a \wedge b) \vee \text{not}(a) \vee c = \text{not}(a) \vee b \vee c$.

a	b	c	$\text{not}(a) \vee b \vee c$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Тогда необходимо получить связь с логическим ИЛИ и стрелкой Пирса:

a	b	$a \downarrow b$	$a \downarrow b$	$(a \downarrow b) \downarrow (a \downarrow b)$	$a \vee b$
0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1

Получаем: $(a \downarrow b) \downarrow (a \downarrow b) = a \vee b$.

Остается выразить отрицание через стрелку Пирса:

a	not(a)	$a \downarrow a$
0	1	1

0	1	1
1	0	0
1	0	0

Получаем: $a \downarrow a = not(a)$.
Тогда:
$not(a) \vee b = ((a \downarrow a) \downarrow b) \downarrow ((a \downarrow a) \downarrow b)$
$(not(a) \vee b) \vee c = (((a \downarrow a) \downarrow b) \downarrow ((a \downarrow a) \downarrow b) \downarrow c) \downarrow (((a \downarrow a) \downarrow b) \downarrow ((a \downarrow a) \downarrow b) \downarrow c)$

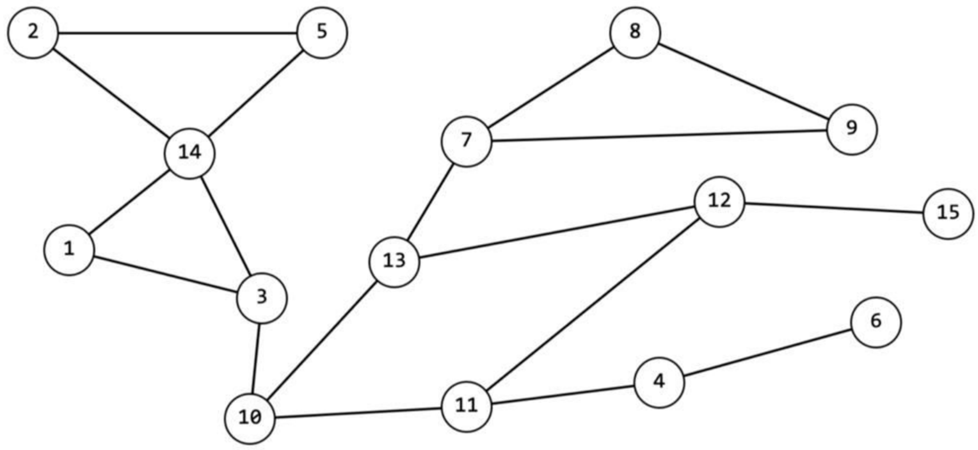
ОТВЕТ (один из возмножных):
$(((a \downarrow a) \downarrow b) \downarrow ((a \downarrow a) \downarrow b) \downarrow c) \downarrow (((a \downarrow a) \downarrow b) \downarrow ((a \downarrow a) \downarrow b) \downarrow c)$

КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ:

Полное решение	20 баллов
Формула неверная из-за неправильного расположения скобок	18 баллов
Доказан переход от логического И, ИЛИ к выражению только с использованием стрелки Пирса	+5 баллов (за каждое)
выражение упрощено до $not(a) \vee b \vee c$ или подобного	+3 балла
Выписали верную формулу, но доказательств недостаточно	7 баллов
Формула верная, но осталось логическое отрицание	5 баллов
Отсутствует решение	0 баллов

Задание 4. (20 баллов)

Маршрутом будем называть последовательность различных ребер графа, где каждые два соседних ребра имеют общую вершину. Дан связный неориентированный граф, необходимо доказать, что в графе не существует маршрута по всем ребрам или предоставить его, если существует.



РЕШЕНИЕ (1 вариант):
Дадим несколько определений:
Бамбук – это граф, который состоит из одного простого пути.
Простой путь – это путь, в котором каждая вершина один раз встречается (далее будем писать просто путь).
Листья – это вершины со степенью 1, то есть у которых есть всего одно смежное ребро.
Компонента двусвяности в нашем случае подразумевается рёберная двусвязность – это множество вершин и рёбер, у котором между любой парой вершин есть хотя бы два рёберно не пересекающихся простых пути
Дерево мостов графа G – это граф, в котором рёбра это мосты в графе G, а вершины – это компоненты рёберной двусвязности графа G, то есть мы каждую компоненту двусвязности сжали до одной вершины и провели рёбра между теми которые связаны мостами
Мост – это ребро при удалении которого граф распадается на несколько компонент связности.
Компонента связности – это множество вершин и рёбер в котором между любыми двумя вершинами есть путь

Докажем теорему: если после удаления всех вершин степени 1 дерево мостов не является бамбуком, то в графе не существует маршрута

Доказательство:

Лемма:
Если после удаления листьев не было маршрута, то до удаления листьев маршрута тоже не было.

Доказательство леммы:
От противного: пусть до удаления листьев был маршрут M, а после нет маршрута. Рассмотрим ребро ведущее в лист, пускай это ребро B, если оно первое или последнее в маршруте M, то его просто можно убрать и у нас останется валидный маршрут, если оно в маршруте M между рёбрами A, C, то у A есть общая вершина с B и у C есть общая вершина с B, B лежит между двумя вершинами (одна из них лист), значит вторая это вершина которая есть у рёбер A и C, значит мы опять из маршрута M можем удалить ребро B и у нас остаётся валидный маршрут. Лемма доказана.
Получаем, что если в изначальном графе есть маршрут, то в графе без листьев он тоже есть.

Так как дерево мостов не бамбук, значит в нём существуют 3 вершины, которые не лежат ни на каком простом пути.

Все компоненты двусвязности размера хотя бы 2, потому что мы удалили все листья.
То есть имеем три ребра (a, b, c) лежащих в разных компонентах двусвязности, при чём эти компоненты в дереве мостов не лежат ни в каком пути.

То есть у нас ситуация как на картинке: есть 3 компоненты A, B, C которые соединены через компоненту между ними, в каждой из компонент есть по ребре (a, b, c) и в компоненту между ними ведут рёбра (a1, b1, c1).

Из-за всего этого рёбра (a, b, c) не принадлежат никакому маршруту, от противного:
Б.О.О рассмотрим маршрут m из ребра a в ребро b.
1) Маршрут m не может содержать ребро c до ребра a, потому что тогда ему бы пришлось сначала зайти в компоненту ребра a, а потом выйти из неё, но из компоненты есть всего одно выходное ребро a1
2) Аналогично после ребра b маршрут не может содержать ребро c.
3) Между рёбрами a, b ребро c в маршруте тоже не может быть, потому что тогда надо сначала зайти в компоненту ребра c, а потом из неё выйти.
Из-за 1,2,3 в маршруте, котором есть рёбра a и b не может быть ребра c.
Теорема доказана.

В данном графе после удаления всех вершин степени 1 дерево мостов не является бамбуком, то в графе не существует маршрута

<u>РЕШЕНИЕ (2 вариант):</u>

Разобьем граф на 4 части:
1 часть состоит из вершин 3, 1, 14, 2, 5
2 часть состоит из вершин 10, 13, 12, 15, 11
3 часть состоит из вершин 4, 6
4 часть состоит из вершин 7, 8, 9
Внутри одной части можно найти маршрут стартуя с любого ребра в рассматриваемой части, но из одной части попасть в другую можно только по одному ребру:
Из 1 части во 2 часть можно попасть, использовав ребро 3-10, из 2 части в 3: 11-4, из 1 части в 4: 7-13.
Если начинать с 1 части, то можно сначала попасть во 2 часть, потом только в одну из оставшихся (3 или 4 часть).
Если начать со 2 части, то можно попасть только в одну из трех оставшихся частей.

Если начать с 3 части, то можно сначала попасть во 2 часть, потом только в одну из оставшихся (1 или 4 часть).
Если начать с 4 части, то можно сначала попасть во 2 часть, потом только в одну из оставшихся (1 или 3 часть).
Получается, что в любом случае остаются ребра, которые не были использованы, тогда маршрута по всем ребрам графа не существует.

ОТВЕТ:
Не существует

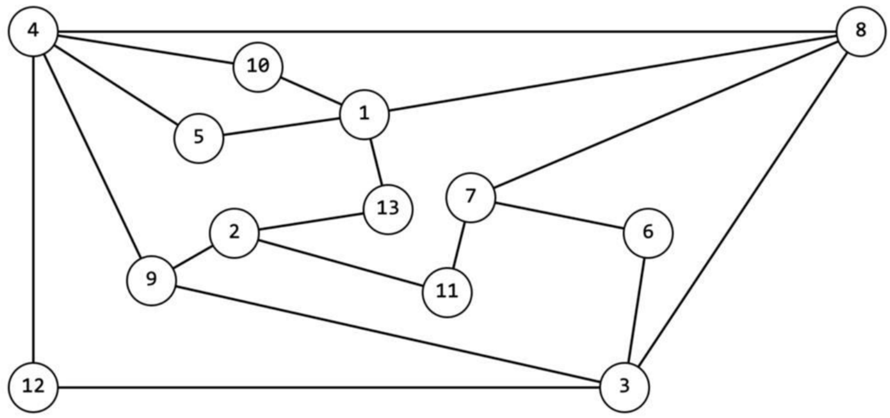
КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ:

Полное решение	20 баллов
Верное разделение на части	10 баллов
Отсутствует решение. Или в решение указан Эйлеров путь. Или отмечено, что вершина 15 является конечной/начальной.	0 баллов

Задание 5. (20 баллов)

Дан связный неориентированный граф.
Необходимо найти паросочетание размера 6, или доказать, что его не существует.

*Паросочетание — это набор рёбер графа, никакие два из которых не имеют общих вершин. Размер паросочетания — это количество рёбер в нём.



РЕШЕНИЕ:
«Доли» – это разбиение множества вершин на два набора, так что:

- все вершины графа попадают либо в первую долю, либо во вторую;
- доли не пересекаются (нет вершины, которая была бы в обеих сразу).

Неориентированный граф называется двудольным, если его вершины можно разбить на две доли (две части) так, что:

- каждое ребро соединяет вершину из первой доли с вершиной из второй,
- нет ни одного ребра, у которого обе вершины лежали бы в одной и той же доле.

В рассматриваемом графе можно определить разбиение вершин на две доли:
L = {1, 2, 3, 4, 7} (5 вершин)
R = {5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13} (8 вершин)
Сделать это можно однозначно, чередуя каждую долю для каждой вершины (альтернатива – раскраска).
И все рёбра идут только между L и R, значит граф двудольный.

Следовательно каждое ребро паросочетания забирает одну вершину из L и одну из R, отметим, что вершины в паросочетании не повторяются, значит, количество рёбер в любом паросочетании не может превышать размера меньшей доли ($\min(|L|, |R|) = 5$).
Поэтому в таком графе паросочетание размера 6 невозможно.

<u>КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ:</u>

Полное решение	20 баллов
Не доказали, что разделение однозначно	18 баллов
Правильно разделили на доли и доказали, что размер паросочетания не больше, чем размер меньшей доли	12 баллов
Правильное разделение на доли (правильная раскраска)	6 баллов
Отсутствует решение	0 баллов

Время выполнения задания – 180 минут. Максимальное количество баллов – 100

10 класс

Задание 1. (20 баллов)

Какие различные тройки неотрицательный целых чисел (x, y, z) удовлетворяют всем следующим условиям:

$$(\sim x \ \& \ z) \mid (x \ \& \ y) = 19528$$
$$\sim z \ \& \ (x \mid y) = 31945$$
$$x \ \& \ (y \oplus z) = 19548$$
$$x \oplus (y \mid z) = 12417$$

если дополнительно известно, что на каждое число выделяется 2 байта памяти.
В качестве ответа запишите количество подходящих различных троек.

*(в данной задаче используются битовые операции: ~ инверсия, & И, | ИЛИ, Å исключающее ИЛИ)

РЕШЕНИЕ:

$$(\sim x \ \& \ z) \mid (x \ \& \ y) = 19528 \qquad (1)$$
$$\sim z \ \& \ (x \mid y) = 31945 \qquad (2)$$
$$x \ \& \ (y \oplus z) = 19548 \qquad (3)$$
$$x \oplus (y \mid z) = 12417 \qquad (4)$$

$19528 = 0100110001001000_2$
$31945 = 0111110011001001_2$
$19548 = 0100110001011100_2$
$12417 = 0011000010000001_2$

Обратим внимание, что значения некоторых битов совпадает, тогда можно рассмотреть только 4 случая:
<u>1 случай</u> (рассмотрим 1, 7, 8, 11 и 15 биты):

$$(\sim x \ \& \ z) \mid (x \ \& \ y) = 0 \qquad (1.1)$$
$$\sim z \ \& \ (x \mid y) = 0 \qquad (2.1)$$
$$x \ \& \ (y \oplus z) = 0 \qquad (3.1)$$
$$x \oplus (y \mid z) = 0 \qquad (4.1)$$

Тогда (1.1) можно расписать:

$$\sim x \ \& \ z = 0 \qquad (1.1.1)$$
$$x \ \& \ y = 0 \qquad (1.1.2)$$

Пусть x = 1, подставим в (1.1.2), получим 1 & y = 0, следовательно y = 0. Тогда получаем ~z & (1 | 0) = 0 (2.1) из чего можно сделать вывод, что ~z = 0, тогда z = 1. Но тогда уравнение (3.1) неверное $1 \ \& \ (0 \oplus 1) \neq 0$, получили противоречие, значит изначальное предположение, что x = 1, было неверным.
Тогда получаем, что x = 0, проанализируем (1.1.1) и заметим, что z = 0. Рассмотрим 1 & (0 | y) = 0 (2.1), следовательно y = 0. Проверяем все условия:

$$1 \ \& \ 0 = 0 \qquad (1.1.1)$$
$$0 \ \& \ y = 0 \qquad (1.1.2)$$
$$1 \ \& \ (0 \mid 0) = 0 \qquad (2.1)$$
$$0 \ \& \ (0 \oplus 0) = 0 \qquad (3.1)$$
$$0 \oplus (0 \mid 0) = 0 \qquad (4.1)$$

Противоречий нет, тогда делаем вывод о том, что получилось однозначно определить значения на 1, 7, 8, 11 и 15 битах: x = y = z = 0
Получили (знак ? – неизвестный бит):
$x = 0?????00??0???0?_2$
$y = 0?????00??0???0?_2$
$z = 0?????00??0???0?_2$

<u>2 случай</u> (рассмотрим 2, 5, 6, 10 и 13 биты):

$$(\sim x \ \& \ z) \mid (x \ \& \ y) = 1 \qquad (1.2)$$
$$\sim z \ \& \ (x \mid y) = 1 \qquad (2.2)$$
$$x \ \& \ (y \oplus z) = 1 \qquad (3.2)$$

$x \oplus (y \mid z) = 0$ (4.2)

Тогда можно расписать два условия (1.2) и (2.2):

$\sim z = 1$ (2.2.1)
$x \mid y = 1$ (2.2.2)
$x = 1$ (3.2.1)
$y \oplus z = 1$ (3.2.2)

Получаем, что z = 0, а x = 1. Подставим полученные значения в (1.2): (0 & 0) | (1 & y) = 1, значит y = 1. Проверим:

$(0 \& 0) \mid (1 \& 1) = 1$ (1.2)
$1 \& (1 \mid 1) = 1$ (2.2)
$1 \& (1 \oplus 0) = 1$ (3.2)
$1 \oplus (1 \mid 0) = 0$ (4.2)

Противоречий нет, тогда делаем вывод о том, что получилось однозначно определить значения на 2, 5, 6, 10 и 13 битах: x = y = 1, z = 0.
Получили (знак ? – неизвестный бит):
$x = 01??1100?10?1?0?_2$
$y = 01??1100?10?1?0?_2$
$z = 00??0000?00?0?0?_2$

<u>3 случай</u> (рассмотрим 12 и 14 биты):

$(\sim x \& z) \mid (x \& y) = 0$ (1.3)
$\sim z \& (x \mid y) = 0$ (2.3)
$x \& (y \oplus z) = 1$ (3.3)
$x \oplus (y \mid z) = 0$ (4.3)

Можно расписать подробнее на случаи условия (1.3) и (3.3):

$\sim x \& z= 0$ (1.3.1)
$x \& y = 0$ (1.3.2)
$x = 1$ (3.3.1)
$y \oplus z = 1$ (3.3.2)

Получаем, что x = 1, а из (1.3.2) можно сделать вывод, что y = 0, тогда из (3.3.2) z = 1. Проверим все условия:

$(0 \& 1) \mid (1 \& 0) = 0$ (1.3)
$0 \& (1 \mid 0) = 0$ (2.3)
$1 \& (0 \oplus 1) = 1$ (3.3)
$1 \oplus (0 \mid 1) = 0$ (4.3)

Противоречий нет, тогда делаем вывод о том, что получилось однозначно определить значения на 12 и 14 битах: x = 1, y = 0, z = 1.
Получили (знак ? – неизвестный бит):
$x = 01??1100?101110?_2$
$y = 01??1100?100100?_2$
$z = 00??0000?001010?_2$

<u>4 случай</u> (3, 4, 9 и 16 биты):

$(\sim x \& z) \mid (x \& y) = 0$ (1.4)
$\sim z \& (x \mid y) = 1$ (2.4)
$x \& (y \oplus z) = 0$ (3.4)
$x \oplus (y \mid z) = 1$ (4.4)

Можно расписать (1.4) и (2.4):

$\sim x \& z = 0$ (1.4.1)
$x \& y = 0$ (1.4.2)
$\sim z = 1$ (2.4.1)
$x \mid y = 1$ (2.4.2)

Проанализируем (2.4.1), тогда получим, что z = 0. Подставим в (4.4) $x \oplus (y \mid 0) = 1$, тогда оно преобразуется в $x \oplus y = 1$, а это означает, что значение y всегда не равно x, следовательно оно однозначно определяется как y = ~x, подставим во все условия:

$$(\sim x \,\&\, 0) \mid (x \,\&\, \sim x) = 0 \qquad (1.4)$$
$$1 \,\&\, (x \mid \sim x) = 1 \qquad (2.4)$$
$$x \,\&\, (\sim x \oplus 0) = 0 \qquad (3.4)$$
$$x \oplus (\sim x \mid 0) = 1 \qquad (4.4)$$

Обратим внимание, что уравнение (1.4) всегда истинно так как ~x & 0 = 0 и x & ~x = 0, аналогично с (2.4), так как x | ~x = 1, а значит 1 & (x | ~x) всегда истинно.

Пусть x = 0:

(3.4) $0 \,\&\, (\sim 0 \oplus 0) = 0 \,\&\, 1 = 0$ верно

(4.4) $0 \oplus (\sim 0 \mid 0) = 0 \oplus 1 = 1$ верно

Тогда при x = 0, y = 1 и z = 0.

Пусть x = 1:

(3.4) $1 \,\&\, (\sim 1 \oplus 0) = 1 \,\&\, 0 = 0$ верно

(4.4) $1 \oplus (\sim 1 \mid 0) = 1 \oplus 0 = 1$ верно

Тогда при x = 1, y = 0 и z = 0.

Получили (знак ? – неизвестный бит):

$x = 01??1100?101110?_2$

$y = 01??1100?100100?_2$

$z = 0000000000010100_2$

Получается, что остается только 4 бита для перебора 0 и 1 у переменной x, так как переменная y найдется однозначно из значения x. Значит ответ $2^4 = 16$.

РЕШЕНИЕ (2 вариант):

Для каждого числа отведено 1 байт = 8 бит памяти, значит в двоичной системе счисления необходимо рассматривать числа длины 8.

$19528 = 0100110001001000_2$

$31945 = 0111110011001001_2$

$19548 = 0100110001011100_2$

$12417 = 0011000010000001_2$

Введем обозначения:

$$(\sim x \,\&\, z) \mid (x \,\&\, y) = 0100110001001000 \qquad (1)$$
$$\sim z \,\&\, (x \mid y) = 0111110011001001 \qquad (2)$$
$$x \,\&\, (y \oplus z) = 0100110001011100 \qquad (3)$$
$$x \oplus (y \mid z) = 0011000010000001 \qquad (4)$$

Рассмотрим таблицу истинности для данных выражений:

Номер строки	x	y	z	(1)	(2)	(3)	(4)	Кол-во повторений
1	0	0	0	0	0	0	0	1
2	0	0	1	1	0	0	1	2
3	0	1	0	0	1	0	1	2
4	0	1	1	1	0	0	1	2
5	1	0	0	0	1	0	1	2
6	1	0	1	0	0	1	0	1
7	1	1	0	1	1	1	0	1
8	1	1	1	1	0	0	0	1

В последнем столбце указано количество повторений для значений (1)-(4), значит, если встречается строка 1001 или 0101, тогда будет 2 варианта для значений переменных x, y, z, а во всех остальных случаях – единственное решение.

Осталось сопоставить значения строк первой таблицы и вычислить значения переменных:

(1)	(2)	(3)	(4)	x	Y	z	Номер строки в 1 таблице
0	0	0	0				1
1	1	1	0				7
0	1	0	1				3, 5
0	1	0	1				3, 5
1	1	1	0				7
1	1	1	0				7
0	0	0	0				1
0	0	0	0				1
0	1	0	1				3, 5
1	1	1	0				7
0	0	0	0				1
0	0	1	0				6
1	1	1	0				7
0	0	1	0				6
0	0	0	0				1
0	1	0	1				3, 5

Тогда получаем, что на 4х позициях по два варианта, ответ $2^4 = 16$.

ОТВЕТ:

16

КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ:

Полное решение	20 баллов
Доказали в каких битах каждой переменной может быть два варианта значения	17 баллов
Верно соотнесли значения каждого бита с таблицей	15 баллов
Правильно использовали логические операции и указали определения 1-8, возможное добавление частичных баллов за объяснение не всех пунктов	11 баллов
Правильно составлена таблица истинности для исходной системы	6 баллов
Правильно перевели числа в 2 систему счисления	1 балл
Отсутствует решение	0 баллов

Задание 2. (20 баллов)

Рассмотрим все пары целых чисел A и B, таких что 0 ≤ A, B < 1024.
Требуется подсчитать количество различных пар (A, B), таких что сумма A и B в двоичной системе счисления записывается ровно 10 битами (с ведущими нулями, если нужно) и является палиндромом. Пары (B, A) и (A, B) считаются одинаковыми.

РЕШЕНИЕ:

Количество способов представить число K в виде суммы двух неотрицательных чисел равно K + 1. Тогда ответ – это сумма всех палиндромов + количество палиндромов.
Количество палиндромов длины N в двоичной системе счисления:
$2^{(N+1)//2} = 2^5 = 32.$
Теперь будем фиксировать в палиндроме i-ый бит равный 1, тогда просто перебираем на 1 бит меньше, то есть получаем $2^{(N+1)//2\,-\,1} = 2^4 = 16$ палиндромов.
Каждый разряд, равный 1 вносит в итоговую сумму 2^i. Тогда для всех разрядов получаем $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{N-1} = 2^N - 1 = 1023$. Следовательно итоговая сумма 1023 * 16 = 16368.
Осталось прибавить количество палиндромов 16368 + 32 = 16400.
Остается учесть случай четной суммы, так как только она не считается два раза, четной суммы столько же вариантов, сколько количество палиндромов, которые оканчиваются на 0 (начинаются на 0), а это 16 (как ранее посчитано), 16400+16 = 16416.

Теперь каждая пара посчитана два раза, следовательно ответ: 16416 / 2 = 8208.

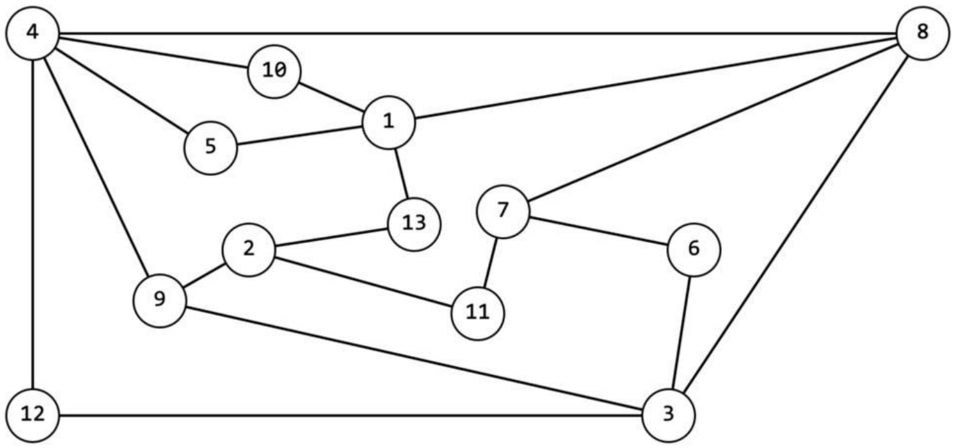
ОТВЕТ:
8208
КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ:

Полное решение	20 баллов
Получили неверный ответ из-за арифметической ошибки	18 баллов
Вывели формулу для подсчета количества пар чисел (общую или отдельно для четных/нечетных)	10 баллов
Указано, что количество способов представить число K в виде суммы двух неотрицательных чисел это K+1	+2 балла
Написано, что необходимо искать сумму всех палиндромов + количество.	+2 балла
Отсутствует решение	0 баллов

Задание 3. (20 баллов)

Дан связный неориентированный граф.
Необходимо найти паросочетание размера 6, или доказать, что его не существует.

*Паросочетание — это набор рёбер графа, никакие два из которых не имеют общих вершин. Размер паросочетания — это количество рёбер в нём.



РЕШЕНИЕ:
«Доли» – это разбиение множества вершин на два набора, так что:
все вершины графа попадают либо в первую долю, либо во вторую;
доли не пересекаются (нет вершины, которая была бы в обеих сразу).
Неориентированный граф называется двудольным, если его вершины можно разбить на две доли (две части) так, что:
каждое ребро соединяет вершину из первой доли с вершиной из второй,
нет ни одного ребра, у которого обе вершины лежали бы в одной и той же доле.
В рассматриваемом графе можно определить разбиение вершин на две доли:
L = {1, 2, 3, 4, 7} (5 вершин)
R = {5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13} (8 вершин)
Сделать это можно однозначно, чередуя каждую долю для каждой вершины (альтернатива – раскраска).
И все рёбра идут только между L и R, значит граф двудольный.
Следовательно каждое ребро паросочетания забирает одну вершину из L и одну из R, отметим, что вершины в паросочетании не повторяются, значит, количество рёбер в любом паросочетании не может превышать размера меньшей доли ($\min(|L|, |R|) = 5$).
Поэтому в таком графе паросочетание размера 6 невозможно.

КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ:

Полное решение	20 баллов
Не доказали, что разделение однозначно	18 баллов
Правильно разделили на доли и доказали, что размер паросочетания не больше, чем размер меньшей доли	12 баллов
Правильное разделение на доли (правильная раскраска)	6 баллов
Отсутствует решение	0 баллов

Задание 4. (20 баллов)

Перед вами стоит необычная шахматная доска размера 2025 на 2025. Необходимо определить, можно ли разместить К королей так, чтобы выполнялось два условия:
1) Никакой король не может дойти ни до какого другого за один шаг
2) Для любой пустой клетки существует король, который может дойти до неё за один шаг
Необходимо определить минимальное и максимальное возможное значение К.

**Король может ходить на одну клетку вправо, влево, вверх, вниз и по диагонали.*

РЕШЕНИЕ:
В каждом блоке 2 на 2 должен быть максимум один король, но 2025 не кратно 2, для ограничения сверху надо округлять вверх, тогда получаем оценку:
k >= ((N + 1) // 2) • ((N + 1) // 2) = (2026//2) • (2026//2)
max_k = 1 026 169
Каждый король может покрыть максимум 9 клеток, 2025 кратно 3, значит доску 2025 на 2025 сможем разбить на квадраты размерами 3 на 3, получаем ограничение снизу:
min_k = (2025 // 3) • (2025 // 3) = 455 625

ОТВЕТ:
От 455 625 до 1 026 169 включительно

КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ:

Полное решение	20 баллов
Получили неверный ответ из-за арифметических ошибки	18 баллов
Доказанно ограничение снизу	+4 балла
Показали наиболее эффективную для минимизации k расстановку королей. Или объяснили, что в блоке 3 на 3 минимум должен быть 1 король.	+5 баллов
Доказанно ограничение сверху	+4 балла
Показали наиболее эффективную для максимизации k расстановку королей. Или объяснили, что в блоке 2 на 2 максимум должен быть 1 король	+5 баллов
Отсутствует решение	0 баллов

Задание 5. (20 баллов)

Стрелка Пирса – логическая операция, которая дает истину, только если оба операнда ложны. На письме обозначается как $\downarrow$. Дано логическое высказывание $(a \wedge b) \vee (a \to c)$, выразите его используя только стрелку Пирса и скобки.

a	b	a $\downarrow$ b
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Таблица истинности для стрелки Пирса

РЕШЕНИЕ:

Распишем:

$(a \wedge b) \vee (a \rightarrow c) = (a \wedge b) \vee not(a) \vee c = not(a) \vee b \vee c$.

a	b	c	not(a) $\vee$ b $\vee$ c
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Тогда необходимо получить связь с логическим ИЛИ и стрелкой Пирса:

a	b	$a \downarrow b$	$a \downarrow b$	$(a \downarrow b) \downarrow (a \downarrow b)$	$a \vee b$
0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1

Получаем: $(a \downarrow b) \downarrow (a \downarrow b) = a \vee b$.

Остается выразить отрицание через стрелку Пирса:

a	not(a)	$a \downarrow a$
0	1	1
0	1	1
1	0	0
1	0	0

Получаем: $a \downarrow a = not(a)$.

Тогда:

$not(a) \vee b = ((a \downarrow a) \downarrow b) \downarrow ((a \downarrow a) \downarrow b)$

$(not(a) \vee b) \vee c = (((a \downarrow a) \downarrow b) \downarrow ((a \downarrow a) \downarrow b) \downarrow c) \downarrow (((a \downarrow a) \downarrow b) \downarrow ((a \downarrow a) \downarrow b) \downarrow c)$

ОТВЕТ (один из возможных):

$(((a \downarrow a) \downarrow b) \downarrow ((a \downarrow a) \downarrow b) \downarrow c) \downarrow (((a \downarrow a) \downarrow b) \downarrow ((a \downarrow a) \downarrow b) \downarrow c)$

КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ:

Полное решение	20 баллов
Формула неверная из-за неправильного расположения скобок	18 баллов
Доказан переход от логического И, ИЛИ к выражению только с использованием стрелки Пирса	+5 баллов (за каждое)
выражение упрощено до not(a) $\vee$ b $\vee$ c или подобного	+3 балла
Выписали верную формулу, но доказательств недостаточно	7 баллов
Формула верная, но осталось логическое отрицание	5 баллов
Отсутствует решение	0 баллов

Время выполнения задания – 180 минут. Максимальное количество баллов – 100

9 класс

Задание 1. (20 баллов)

Найти все неотрицательные целые числа x, y, z, которые удовлетворяют всем условиям:

$$(\sim x \ \& \ z) \mid (x \ \& \ y) = 67$$
$$\sim z \ \& \ (x \mid y) = 67$$
$$x \ \& \ (y \oplus z) = 203$$
$$x \oplus (y \mid z) = 0$$

если дополнительно известно, что на каждое число выделяется 1 байт памяти.
В качестве ответа запишите значения x, y, z в десятичной системе счисления.

**(в данной задаче используются битовые операции: ~ инверсия, & И, | ИЛИ, ⊕ исключающее ИЛИ)*

РЕШЕНИЕ:

Для каждого числа отведено 1 байт = 8 бит памяти, значит в двоичной системе счисления необходимо рассматривать числа длины 8.

$67 = 64 + 2 + 1 = 2^6 + 2^1 + 2^0 = 01000011_2$

$203 = 128 + 64 + 8 + 2 + 1 = 2^7 + 2^6 + 2^3 + 2^1 + 2^0 = 11001011_2$

Введем обозначения:

$$(\sim x \ \& \ z) \mid (x \ \& \ y) = 01000011 \qquad (1)$$
$$\sim z \ \& \ (x \mid y) = 01000011 \qquad (2)$$
$$x \ \& \ (y \oplus z) = 11001011 \qquad (3)$$
$$x \oplus (y \mid z) = 00000000 \qquad (4)$$

Обратим внимание на то, что достаточно рассмотреть только три случая, так как значение битов на местах 1 и 5; 2, 7 и 8; 3, 4 и 6 совпадают во всех условиях (нумерация слева направо, начиная с 1)

Далее будет использовать определения:

1) $a \mid b = 0$ тогда, когда $a = 0$ и $b = 0$;
2) $a \mid b = 1$ тогда, когда одна или обе переменные = 1;
3) $a \ \& \ b = 0$ тогда, когда одна или обе переменные = 0;
4) $a \ \& \ b = 1$ тогда, когда $a = 1$ и $b = 1$;
5) $a \oplus b = 0$ тогда, когда $a = b$;
6) $a \oplus b = 1$ тогда, когда $a \neq b$;
7) $\sim a = 0$ тогда, когда $a = 1$;
8) $\sim a = 1$ тогда, когда $a = 0$.

<u>1 случай</u> (находим значения x, y и z на 1 и 5 битах)

$$(\sim x \ \& \ z) \mid (x \ \& \ y) = 0 \qquad (1.1)$$
$$\sim z \ \& \ (x \mid y) = 0 \qquad (2.1)$$
$$x \ \& \ (y \oplus z) = 1 \qquad (3.1)$$
$$x \oplus (y \mid z) = 0 \qquad (4.1)$$

Подставим определение 4) в уравнение (3.1), получим:

$$x = 1 \qquad (3.1.1)$$
$$y \oplus z = 1 \qquad (3.1.2)$$

Значит из (3.1.1) x=1, тогда ~x = 0. Подставим в (1.1):

$$(0 \ \& \ z) \mid (1 \ \& \ y) = 0 \qquad (1.1)$$

Тогда

$$0 \ \& \ z = 0 \qquad (1.1.1)$$
$$1 \ \& \ y = 0 \qquad (1.1.2)$$

Из (1.1.2) получаем y = 0, подставим в (2.1)

$$\sim z \ \& \ (1 \mid 0) = 0 \qquad (2.1)$$

Получаем, что ~z = 0, значит z = 1. Осталось проверить (3.1) и (4.1):

$$1 \ \& \ (0 \oplus 1) = 1 \qquad (3.1)$$

$1 \oplus (0 \mid 1) = 0$ (4.1)

Противоречий нет, все верно. Значит на 1 и 5 битах x = 1, y = 0 и z = 1.

<u>2 случай</u> (находим значения x, y и z на 2, 7 и 8 битах)

$(\sim x \,\&\, z) \mid (x \,\&\, y) = 1$ (1.2)

$\sim z \,\&\, (x \mid y) = 1$ (2.2)

$x \,\&\, (y \oplus z) = 1$ (3.2)

$x \oplus (y \mid z) = 0$ (4.2)

Подставим определение 4) в уравнение (2.2) и (3.2), получим:

$\sim z = 1$ (2.2.1)

$(x \mid y) = 1$ (2.2.2)

$x = 1$ (3.2.1)

$(y \oplus z) = 1$ (3.2.2)

Получили z = 0, x = 1, подставляя в (3.2.2) используя свойство 6) получаем y = 1.
Осталось только проверить все условия:

$(0 \,\&\, 0) \mid (1 \,\&\, 1) = 1$ (1.2)

$1 \,\&\, (1 \mid 1) = 1$ (2.2)

$1 \,\&\, (1 \oplus 0) = 1$ (3.2)

$1 \oplus (1 \mid 0) = 0$ (4.2)

Противоречий не обнаружено, значит нашли однозначно значения на 2, 7 и 8 битах x = 1, y = 1 и z = 0.

<u>3 случай</u> (находим значения x, y и z на 3, 4 и 6 битах)

$(\sim x \,\&\, z) \mid (x \,\&\, y) = 0$ (1.3)

$\sim z \,\&\, (x \mid y) = 0$ (2.3)

$x \,\&\, (y \oplus z) = 0$ (3.3)

$x \oplus (y \mid z) = 0$ (4.3)

Пусть x = 1, тогда подставим в (1.3), получим (0 & z) | (1 & y) = 0, учитывая свойство 1): 1 & y = 0, а значит y = 0, подставим в (2.3) ~z & (1 | 0) = 0, значит ~z & 1 = 0, тогда ~z & 1 = 0, получаем ~z = 0, следовательно z= 1.
Проверим все условия:

$(0 \,\&\, 1) \mid (1 \,\&\, 0) = 0$ (1.3)

$0 \,\&\, (1 \mid 0) = 0$ (2.3)

$1 \,\&\, (0 \oplus 1) \neq 0$ (3.3)

$1 \oplus (0 \mid 1) = 0$ (4.3)

В таком случае получаем противоречие в (3.3), тогда можно сделать вывод о том, что наше предположение о том, что x = 1 неверно, тогда x = 0.
Подставим в (1.3) учитывая свойство 1): 1 & z = 0, а значит z = 0, подставим в (4.3) $0 \oplus (y \mid 0) = 0$, учитывая свойство 5): y | 0 = 0, значит y = 0. Проверим все условия:

$(1 \,\&\, 0) \mid (0 \,\&\, 0) = 0$ (1.3)

$1 \,\&\, (0 \mid 0) = 0$ (2.3)

$0 \,\&\, (0 \oplus 0) = 0$ (3.3)

$0 \oplus (0 \mid 0) = 0$ (4.3)

Противоречий не найдено, значит получили однозначное решение на 3, 4 и 6 битах x = 0, y = 0 и z = 0.
Тогда окончательный ответ:

$x = 11001011_2 = 2^7 + 2^6 + 2^3 + 2^1 + 2^0 = 128 + 64 + 8 + 2 + 1 = 203$

$y = 01000011_2 = 2^6 + 2^1 + 2^0 = 64 + 2 + 1 = 67$

$z = 10001000_2 = 2^7 + 2^3 = 128 + 8 = 136$

<u>РЕШЕНИЕ (2 вариант):</u>

Для каждого числа отведено 1 байт = 8 бит памяти, значит в двоичной системе счисления необходимо рассматривать числа длины 8.

$67 = 64 + 2 + 1 = 2^6 + 2^1 + 2^0 = 01000011_2$

$203 = 128 + 64 + 8 + 2 + 1 = 2^7 + 2^6 + 2^3 + 2^1 + 2^0 = 11001011_2$

Введем обозначения:

$(\sim x \,\&\, z) \mid (x \,\&\, y) = 01000011$ (1)

$\sim z \,\&\, (x \mid y) = 01000011$ (2)

$x \& (y \oplus z) = 11001011$ (3)

$x \oplus (y \mid z) = 00000000$ (4)

Рассмотрим таблицу истинности для данных выражений:

Номер строки	x	y	z	(1)	(2)	(3)	(4)	Кол-во повторений
1	0	0	0	0	0	0	0	1
2	0	0	1	1	0	0	1	2
3	0	1	0	0	1	0	1	2
4	0	1	1	1	0	0	1	2
5	1	0	0	0	1	0	1	2
6	1	0	1	0	0	1	0	1
7	1	1	0	1	1	1	0	1
8	1	1	1	1	0	0	0	1

В последнем столбце указано количество повторений для значений (1)-(4), значит если встречается строка 1001 или 0101, тогда будет 2 варианта для значений переменных x, y, z, а во всех остальных случаях - единственное решение.

Осталось сопоставить значения строк первой таблицы и вычислить значения переменных:

(1)	(2)	(3)	(4)	x	y	z	Номер строки в 1 таблице
0	0	1	0	1	0	1	6
1	1	1	0	1	1	0	7
0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	1	0	1	6
0	0	0	0	0	0	0	1
1	1	1	0	1	1	0	7
1	1	1	0	1	1	0	7

Тогда получаем:

$x = 11001011_2 = 128+64+8+2+1 = 203$

$y = 01000011_2 = 64+2+1 = 67$

$z = 10001000_2 = 128+8 = 136$

ОТВЕТ:

x = 203, y = 67, z = 136

КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ:

Полное решение	20 баллов
Получили неверный ответ из-за ошибки при переводе чисел из 2 системы счисления в 10 систему счисления	18 баллов
Доказали единственность решения и верное его нашли в 2 системе счисления	16 баллов
Верно соотнесли значения каждого бита с таблицей	15 баллов
Правильно использовали логические операции и указали определения 1-8, возможное добавление частичных баллов за объяснение не всех пунктов	11 баллов
Правильно составлена таблица истинности для исходной системы	6 баллов
Правильно перевели числа в 2 систему счисления	1 балл
Отсутствует решение	0 баллов

Задание 2. (20 баллов).

Даны три числа $A = 3x3_a$, $B=1y7_b$, $C=39z_c$, записанные в системах счисления a, b, c соответственно (буквы x, y, z обозначают неизвестный разряд). Если расположить данные числа в порядке A, B, C, то их значения

образуют арифметическую прогрессию Сумма чисел A, B, C равна 2100_{10}. Число A кратно 7. Также известно, что произведение оснований систем счисления данных чисел равно 4095_{10}.
Необходимо определить значения всех неизвестных. Записать ответ в виде xyzabcABC.

РЕШЕНИЕ:

Так как числа A, B, C образовывают арифметическую прогрессию, следовательно 2•B = A+C.
Из условия: A+B+C=2100, значит B = 700. Числа a, b, c находятся среди делителей 4095, т.е. {1, 3, 5, 7, 9, 13, 15, 21, 35, 39, и тд}. Каждый разряд в числе должен быть меньше основания, тогда a > 3, b > 7, c > 9, учитывая делители 4095, то $a_{min} = 5$, $b_{min} = 9$, $c_{min} = 13$.
Распишем $B = b^2+by+7=700$ и оценим сверху значение b, зная B=700, получаем $b^2 = 693-by <= 693$, значит $b_{max} = 26$, b>7 и является делителем 4095, значит b = {9, 13, 15, 21}, $y = (693- b^2)/b$, также 0<=y<b, тогда
$0 <= (693-b^2)/b < b$, получаем 18<b<=26, тогда b = 21, а y = 12.
$A = 3a^2+ax+3$, $C = 3c^2+9c+z$, подставим в условие A+C = 1400, получим $3a^2+ax+3+3c^2+9c+z=1400$.
Чтобы оценить наибольшее значение при условии, что c>9, получаем:
$3a^2 =1400-ax-3-3c^2-9c-z <= 1400-3-300-90 = 1007$, $a_{max} = 18$ с учетом того, что a > 3 и тот, что число a является делителем 4095, получаем a = {5, 7, 9, 13, 15}
Аналогично находим то, что c < 24, значит c = {13, 15, 21}.
(1 способ)
Получили a = {5, 7, 9, 13, 15}, c = {13, 15, 21}, a•c = 195, тогда остается рассмотреть только два варианта:

1) a=13 и c=15: тогда x<13 и A = 510+13x кратно 7, подходит только x = 6, тогда A = 588, C = 812 = 810+z, z = 2.
2) a=15 и c=13: тогда x<15 и A = 678+15x кратно 7, подходит x = {1, 8}. Рассмотрим x = 1, A = 693, C = 707 = 624+z, z = 83 > c, противоречие. Рассмотрим x = 8, A = 798, C = 602 = 624+z, z = -22 < 0, противоречие.

Остается только вариант: a=13, c=15, x = 6, A=588, C=812, z =2.
(2 способ)
A+C = 1400, тогда C = 1400-A
$C = 3c^2+9c+z$, тогда $z = 1400-A-3c^2-9c$
0<=z<c, тогда $0<=1400-A-3c^2-9c<c$,
$3c^2+9c-1400 <= -A < 3c^2+10c-1400$
$-3c^2-10c+1400 < A <= -3c^2-9c+1400$
Если c = 13: 763 < A <= 776, рассматриваем только A кратные 7, значит подходит только A=770, тогда $3a^2+ax = 767$, значит 767 должно быть кратно a, ранее было доказано, что a = {5, 7, 9, 13, 15}, тогда подходит только a=13, подставим и найдем x: 13x=260, x=20>a, значит не подходит.
Если c = 15: 575 < A <= 590, рассматриваем только A кратные 7, значит подходит A={581, 588}. Пусть A=581, тогда $3a^2+ax = 578$, значит 578 должно быть кратно a, ранее было доказано, что a = {5, 7, 9, 13, 15}, но из данного множества никакое значение a не подходит. Рассмотрим A=588, $3a^2+ax = 585$, значит 585 должно быть кратно a, ранее было доказано, что a = {5, 7, 9, 13, 15}, тогда подходят a={5, 9, 13, 15}, 0<=x<a
$0<=(585-3a^2)/a < a$, 12<a<=13, тогда a = 13, x = 6. C = 812, $3c^2+9c+z=812$, учитывая то, что 0<=z<c, получаем $0 <= 812-3c^2-9c < c$, тогда 14<c<=15, значит c=15, а z = 2.
Если c = 21: -133 < A <= -112, нет решений, так как A должно быть положительным
Получаем: x=6, y=12, z=2, a=13, b=21, c=15, A=588, B=700, C=812.

ОТВЕТ:

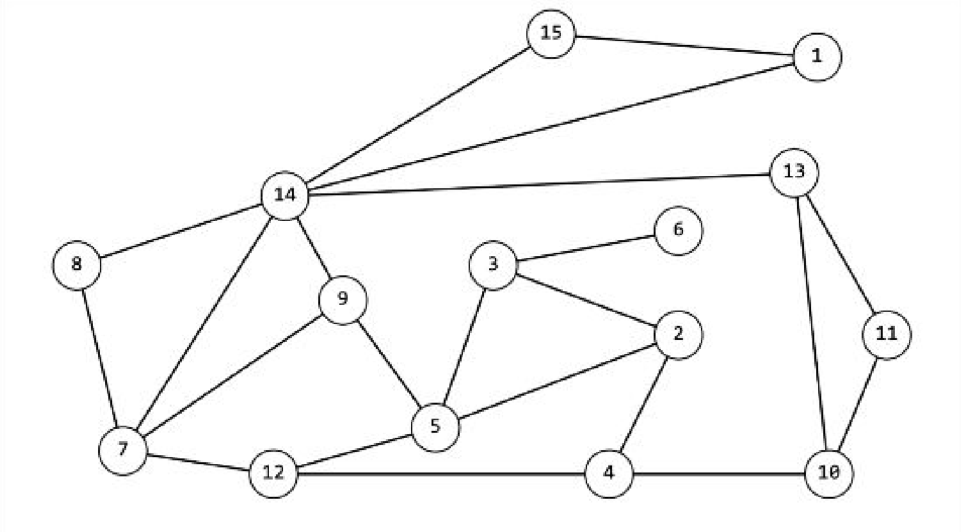
6122132115588700812

КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ:

Полное решение	20 баллов
Верно доказаны все предыдущие пункты и получен неверный ответ из-арифметической ошибки	18 баллов
Нашли B=700 и доказали ограничения для a, b, c, также доказали единственность решения	15 баллов
Нашли ограничения для a, b, c (за каждую букву по 3 балла)	9 баллов
Доказали, что B=700	1 балл
Отсутствует решение	0 баллов

Задание 3. (20 баллов).

Маршрутом будем называть последовательность различных ребер графа, где каждые два соседних ребра имеют общую вершину. Дан связный неориентированный граф, необходимо доказать, что в графе не существует маршрута по всем ребрам или предоставить его, если существует.



<u>РЕШЕНИЕ:</u>

Существует маршрут, например: (1-15), (1-14), (14-15), (13-14), (9-14), (7-14), (8-14), (7-8), (7-9), (7-12), (4-12), (5-12), (5-9), (2-5), (3-5), (3-6), (2-3), (2-4), (4-10), (10-13), (10-11), (11-13)

<u>КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ:</u>

Привели один из правильных вариантов ответа	20 баллов
Отсутствует решение. Или в решении пишут про Эйлеров путь. Или доказывают отсутствие маршрута через нечетность степеней вершин.	0 баллов

Задание 4. (20 баллов).

Перед вами стоит необычная шахматная доска размера 13 на 16. Необходимо определить, можно ли разместить 40 королей так, чтобы выполнялось два условия:

1) Никакой король не может дойти ни до какого другого за один шаг
2) Для любой пустой клетки существует король, который может дойти до неё за один шаг

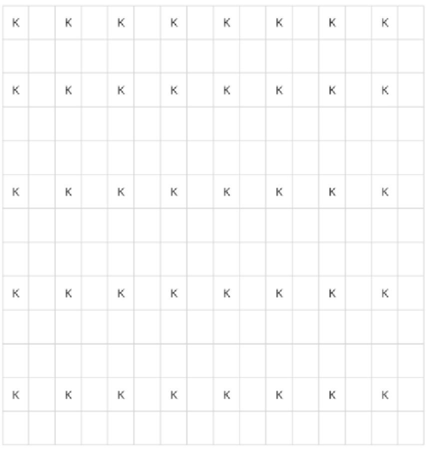
Если это возможно, тогда показать пример, иначе доказать обратное.

**Король может ходить на одну клетку вправо, влево, вверх, вниз и по диагонали.*

<u>РЕШЕНИЕ:</u>

Пусть K – количество королей.

Чтобы каждый король не смог дойти до другого короля необходимо, чтобы в каждом блоке 2 на 2 был максимум один король, поэтому можно ограничить сверху:



K <= ((N + 1) // 2) • ((M + 1) // 2) = 56

Чтобы из каждой пустой клетки можно было дойти до короля, то в каждом блоке 3 на 3 достаточно одного короля, поэтому можно ограничить сверху:

K >= ((N + 2) // 3) • ((M + 2) // 3) = 30

Значит на доске 13 на 16 можно расставить любое кол-во королей от 30 до 56.

Один из примеров расставления королей представлен на рисунке.

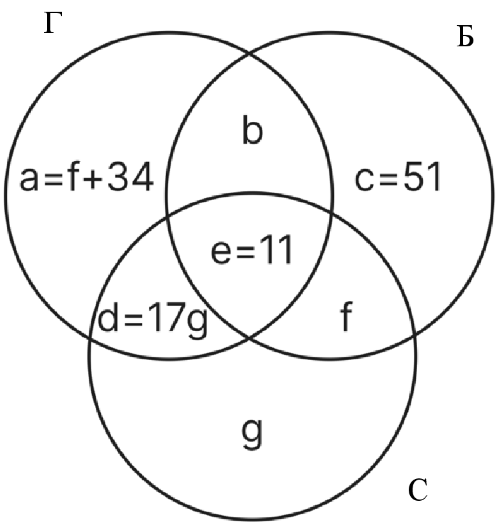
КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ:

Привели один из правильных вариантов ответа с пояснением	20 баллов
Доказано ограничение сверху/снизу	5 баллов
Доказано, что в каждом участке 3 на 3 достаточно одного короля. Показали наиболее эффективную для минимизации k расстановку королей(один король в клетке (2, 2), остальные с шагом 3 от него)	5 баллов
Доказано, что в каждом участке 2 на 2 может быть не более одного короля. Показали наиболее эффективную для максимизации k расстановку королей(один король в углу, остальные с шагом 2 от него)	5 баллов
Отсутствует решение.	0 баллов

Задание 5. (20 баллов).

В музыкальной школе ученики играют на гитаре, барабанах и скрипке. Известно, что количество человек, которые играют и на барабанах, и на скрипке на 23 меньше, чем тех, кто играет только на гитаре. Тех, кто играет только на барабанах, на 40 человек больше тех, кто играет на всех инструментах сразу. Количество тех, кто играет и на гитаре, и на скрипке, но не играет на барабанах, в 17 раз больше тех, кто играет только на скрипке. Тех, кто играет на всех трех инструментах сразу, 11 человек. Также известно, что количество тех, кто играет на гитаре, не менее 229 и не более 237 человек, а тех, кто играет на барабанах, не менее 109 и не более 115 человек.
Вычислите, на сколько человек количество играющих на гитаре превышает количество играющих на барабанах?

РЕШЕНИЕ:



Из условия задачи e+f+23=a, e=11, тогда a = f+34, также дано, что c-40=e, тогда c = 40+11=51.
Также учтем далее то, что d = 17g
Играющих на гитаре Г = a+b+d+e = f+34+b+d+11 = f+b+17g+45
Играющих на барабанах Б = b+c+e+f = b+51+11+f = b+f+62
Тогда Г – Б = f+17g+b+45 – (b+f+62) = 17g – 17 = 17(g – 1), получили то, что ответ должен быть кратен 17
Дано: $229 \leq Г \leq 237$ и $109 \leq Б \leq 115$.
Значит:
$229\text{-}115 \leq Г – Б \leq 237\text{-}109$
$114 \leq Г – Б \leq 128$
Причем это значение должно быть кратно 17, как показано выше, значит ответ 119

ОТВЕТ:
119

КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ:

Полное решение	20 баллов
Доказали кратность 17	+4 балла
Верно оценили ответ сверху (128)	+4 балла
Верно оценили ответ снизу (114)	+4 балла
Верно начаты рассуждения (в зависимости от того, сколько доказали)	До 3 баллов
Отсутствует решение	0 баллов

Время выполнения задания – 180 минут. Максимальное количество баллов – 100

8 класс

Задание 1. (20 баллов)

Найти все неотрицательные целые числа x, y, z, которые удовлетворяют всем условиям:

$$(\sim x \,\&\, z) \mid (x \,\&\, y) = 67$$
$$\sim z \,\&\, (x \mid y) = 67$$
$$x \,\&\, (y \oplus z) = 203$$
$$x \oplus (y \mid z) = 0$$

если дополнительно известно, что на каждое число выделяется 1 байт памяти.
В качестве ответа запишите значения x, y, z в десятичной системе счисления.

**(в данной задаче используются битовые операции: ~ инверсия, & И, | ИЛИ, ⊕ XOR)*

<u>РЕШЕНИЕ:</u>

Для каждого числа отведено 1 байт = 8 бит памяти, значит в двоичной системе счисления необходимо рассматривать числа длины 8.

$67 = 64 + 2 + 1 = 2^6 + 2^1 + 2^0 = 01000011_2$

$203 = 128 + 64 + 8 + 2 + 1 = 2^7 + 2^6 + 2^3 + 2^1 + 2^0 = 11001011_2$

Введем обозначения:

$$(\sim x \,\&\, z) \mid (x \,\&\, y) = 01000011 \qquad (1)$$
$$\sim z \,\&\, (x \mid y) = 01000011 \qquad (2)$$
$$x \,\&\, (y \oplus z) = 11001011 \qquad (3)$$
$$x \oplus (y \mid z) = 00000000 \qquad (4)$$

Обратим внимание на то, что достаточно рассмотреть только три случая, так как значение битов на местах 1 и 5; 2, 7 и 8; 3, 4 и 6 совпадают во всех условиях (нумерация слева направо, начиная с 1)

Далее будет использовать определения:

9) a | b = 0 тогда, когда a = 0 и b = 0;
10) a | b = 1 тогда, когда одна или обе переменные = 1;
11) a & b = 0 тогда, когда одна или обе переменные = 0;
12) a & b = 1 тогда, когда a = 1 и b = 1;
13) a ⊕ b = 0 тогда, когда a = b;
14) a ⊕ b = 1 тогда, когда a ≠ b;
15) ~a = 0 тогда, когда a = 1;
16) ~a = 1 тогда, когда a = 0.

<u>1 случай</u> (находим значения x, y и z на 1 и 5 битах)

$$(\sim x \,\&\, z) \mid (x \,\&\, y) = 0 \qquad (1.1)$$
$$\sim z \,\&\, (x \mid y) = 0 \qquad (2.1)$$
$$x \,\&\, (y \oplus z) = 1 \qquad (3.1)$$
$$x \oplus (y \mid z) = 0 \qquad (4.1)$$

Подставим определение 4) в уравнение (3.1), получим:

$$x = 1 \qquad (3.1.1)$$
$$y \oplus z = 1 \qquad (3.1.2)$$

Значит из (3.1.1) x=1, тогда ~x = 0. Подставим в (1.1):

$$(0 \,\&\, z) \mid (1 \,\&\, y) = 0 \qquad (1.1)$$

Тогда

$$0 \,\&\, z = 0 \qquad (1.1.1)$$
$$1 \,\&\, y = 0 \qquad (1.1.2)$$

Из (1.1.2) получаем y = 0, подставим в (2.1)

$$\sim z \,\&\, (1 \mid 0) = 0 \qquad (2.1)$$

Получаем, что ~z = 0, значит z = 1. Осталось проверить (3.1) и (4.1):

$$1 \,\&\, (0 \oplus 1) = 1 \qquad (3.1)$$
$$1 \oplus (0 \mid 1) = 0 \qquad (4.1)$$

Противоречий нет, все верно. Значит на 1 и 5 битах x = 1, y = 0 и z = 1.

<u>2 случай</u> (находим значения x, y и z на 2, 7 и 8 битах)

$$(\sim x \,\&\, z) \mid (x \,\&\, y) = 1 \qquad (1.2)$$
$$\sim z \,\&\, (x \mid y) = 1 \qquad (2.2)$$
$$x \,\&\, (y \oplus z) = 1 \qquad (3.2)$$
$$x \oplus (y \mid z) = 0 \qquad (4.2)$$

Подставим определение 4) в уравнение (2.2) и (3.2), получим:

$$\sim z = 1 \qquad (2.2.1)$$
$$(x \mid y) = 1 \qquad (2.2.2)$$
$$x = 1 \qquad (3.2.1)$$
$$(y \oplus z) = 1 \qquad (3.2.2)$$

Получили z = 0, x = 1, подставляя в (3.2.2) используя свойство 6) получаем y = 1.
Осталось только проверить все условия:

$$(0 \,\&\, 0) \mid (1 \,\&\, 1) = 1 \qquad (1.2)$$
$$1 \,\&\, (1 \mid 1) = 1 \qquad (2.2)$$
$$1 \,\&\, (1 \oplus 0) = 1 \qquad (3.2)$$
$$1 \oplus (1 \mid 0) = 0 \qquad (4.2)$$

Противоречий не обнаружено, значит нашли однозначно значения на 2, 7 и 8 битах x = 1, y = 1 и z = 0.

<u>3 случай</u> (находим значения x, y и z на 3, 4 и 6 битах)

$$(\sim x \,\&\, z) \mid (x \,\&\, y) = 0 \qquad (1.3)$$
$$\sim z \,\&\, (x \mid y) = 0 \qquad (2.3)$$
$$x \,\&\, (y \oplus z) = 0 \qquad (3.3)$$
$$x \oplus (y \mid z) = 0 \qquad (4.3)$$

Пусть x = 1, тогда подставим в (1.3), получим (0 & z) | (1 & y) = 0, учитывая свойство 1): 1 & y = 0, а значит y = 0, подставим в (2.3) ~z & (1 | 0) = 0, значит ~z & 1 = 0, тогда ~z & 1 = 0, получаем ~z = 0, следовательно z= 1.
Проверим все условия:

$$(0 \,\&\, 1) \mid (1 \,\&\, 0) = 0 \qquad (1.3)$$
$$0 \,\&\, (1 \mid 0) = 0 \qquad (2.3)$$
$$1 \,\&\, (0 \oplus 1) \neq 0 \qquad (3.3)$$
$$1 \oplus (0 \mid 1) = 0 \qquad (4.3)$$

В таком случае получаем противоречие в (3.3), тогда можно сделать вывод о том, что наше предположение о том, что x = 1 неверно, тогда x = 0.
Подставим в (1.3) учитывая свойство 1): 1 & z = 0, а значит z = 0, подставим в (4.3) 0 ⊕ (y | 0) = 0, учитывая свойство 5): y | 0 = 0, значит y = 0. Проверим все условия:

$$(1 \,\&\, 0) \mid (0 \,\&\, 0) = 0 \qquad (1.3)$$
$$1 \,\&\, (0 \mid 0) = 0 \qquad (2.3)$$
$$0 \,\&\, (0 \oplus 0) = 0 \qquad (3.3)$$
$$0 \oplus (0 \mid 0) = 0 \qquad (4.3)$$

Противоречий не найдено, значит получили однозначное решение на 3, 4 и 6 битах x = 0, y = 0 и z = 0.
Тогда окончательный ответ:
$x = 11001011_2 = 2^7 + 2^6 + 2^3 + 2^1 + 2^0 = 128 + 64 + 8 + 2 + 1 = 203$
$y = 01000011_2 = 2^6 + 2^1 + 2^0 = 64 + 2 + 1 = 67$
$z = 10001000_2 = 2^7 + 2^3 = 128 + 8 = 136$

<u>РЕШЕНИЕ (2 вариант):</u>

Для каждого числа отведено 1 байт = 8 бит памяти, значит в двоичной системе счисления необходимо рассматривать числа длины 8.
$67 = 64 + 2 + 1 = 2^6 + 2^1 + 2^0 = 01000011_2$
$203 = 128 + 64 + 8 + 2 + 1 = 2^7 + 2^6 + 2^3 + 2^1 + 2^0 = 11001011_2$
Введем обозначения:

$$(\sim x \,\&\, z) \mid (x \,\&\, y) = 01000011 \qquad (1)$$
$$\sim z \,\&\, (x \mid y) = 01000011 \qquad (2)$$
$$x \,\&\, (y \oplus z) = 11001011 \qquad (3)$$

$$x \oplus (y \mid z) = 00000000 \qquad (4)$$

Рассмотрим таблицу истинности для данных выражений:

Номер строки	x	y	z	(1)	(2)	(3)	(4)	Кол-во повторений
1	0	0	0	0	0	0	0	1
2	0	0	1	1	0	0	1	2
3	0	1	0	0	1	0	1	2
4	0	1	1	1	0	0	1	2
5	1	0	0	0	1	0	1	2
6	1	0	1	0	0	1	0	1
7	1	1	0	1	1	1	0	1
8	1	1	1	1	0	0	0	1

В последнем столбце указано количество повторений для значений (1)-(4), значит если встречается строка 1001 или 0101, тогда будет 2 варианта для значений переменных x, y, z, а во всех остальных случаях - единственное решение.
Осталось сопоставить значения строк первой таблицы и вычислить значения переменных:

(1)	(2)	(3)	(4)	x	y	z	Номер строки в 1 таблице
0	0	1	0	1	0	1	6
1	1	1	0	1	1	0	7
0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	1	0	1	6
0	0	0	0	0	0	0	1
1	1	1	0	1	1	0	7
1	1	1	0	1	1	0	7

Тогда получаем:
$x = 11001011_2 = 128+64+8+2+1 = 203$
$y = 01000011_2 = 64+2+1 = 67$
$z = 10001000_2 = 128+8 = 136$

ОТВЕТ:
x = 203, y = 67, z = 136

КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ:

Полное решение	20 баллов
Получили неверный ответ из-за ошибки при переводе чисел из 2 системы счисления в 10 систему счисления	18 баллов
Доказали единственность решения и верное его нашли в 2 системе счисления	16 баллов
Верно соотнесли значения каждого бита с таблицей	15 баллов
Правильно использовали логические операции и указали определения 1-8, возможное добавление частичных баллов за объяснение не всех пунктов	11 баллов
Правильно составлена таблица истинности для исходной системы	6 баллов
Правильно перевели числа в 2 систему счисления	1 балл
Отсутствует решение	0 баллов

Задание 2. (20 баллов)

Дано три числа $A = 3x3_a$, $B=1y7_b$, $C=39z_c$, записанные в системах счисления a, b, c соответственно (в числах буквы x, y, z обозначают неизвестный один разряд). Если данные числа расположить в таком порядке: A, B, C, то они будут образовывать арифметическую прогрессию. Сумма чисел A, B, C равна 2100 в десятичной

системе счисления. Произведение оснований данных чисел равно 4095 в десятичной системе счисления, а также a<c<b.
Необходимо определить значения всех неизвестных. Записать ответ в виде xyzabcABC.

РЕШЕНИЕ:

Так как числа A, B, C образовывают арифметическую прогрессию, следовательно 2•B = A+C.
Из условия: A+B+C=2100, значит B = 700. Числа a, b, c находятся среди делителей 4095, т.е. {1, 3, 5, 7, 9, 13, 15, 21, 35, 39, и тд}. Каждый разряд в числе должен быть меньше основания, тогда a > 3, b > 7, c > 9, известно a < c < b, тогда a > 3, b > 10, c > 9, учитывая делители 4095, то $a_{min} = 5$, $b_{min} = 15$, $c_{min} = 13$.
Распишем $B = b^2+by+7=700$ и оценим сверху значение b, зная B=700, получаем $b^2 = 693-by <= 693$, значит $b_{max} = 26$, b>10 и является делителем 4095, значит b = {13, 15, 21}
$A = 3a^2+ax+3$, $C = 3c^2+9c+z$, подставим в условие A+C = 1400, получим $3a^2+ax+3+3c^2+9c+z=1400$.
Чтобы оценить наибольшее значение при условии, что c>9, получаем:
$3a^2 =1400-ax-3-3c^2-9c-z <= 1400-3-300-90 = 1007$, $a_{max} = 18$ с учетом того, что a > 3 и тот, что число a является делителем 4095, получаем a = {5, 7, 9, 13, 15}
Аналогично находим то, что c < 24, значит c = {13, 15, 21}.
Получили a = {5, 7, 9, 13, 15}, c = {13, 15, 21}, b = {13, 15, 21}, a•b•c = 4095 и a<c<b.
Будем перебирать c.

1) Пусть c=13: тогда a = {5, 7, 9}, b = {15, 21}: если b = 15, тогда a = 4095:195=21, не удовлетворяет условию того, что a = {5, 7, 9}; если b = 21, тогда a = 13, не удовлетворяет условию того, что a = {5, 7, 9}
2) Пусть c=15: тогда a = {5, 7, 9, 13}, b = 21, тогда a = 13, подходит.
3) Пусть c=21: тогда для b нет подходящих вариантов, которые удовлетворяли бы условию, что c < b.

Получили, что a = 13, b = 21, c=15.
Тогда B = 441+21y+7=700, получаем y = 12.
$A = 3a^2+ax+3 = 510+13x$, $C = 3c^2+9c+z = 810+z$, A+C=1400, x<13, z<15.
Тогда 510+13x+810+z=1400, 13x+z = 80, тогда z = 80-13x и z<15, тогда 80-13x < 15, получаем x > 5
С другой стороны $x = (80-z)/13 <= 80/13 \approx 6{,}15$. Тогда получаем x = 6, а z = 80-78=2.
A = 510+78 = 588
C = 810+2=812
Получаем: x=6, y=12, z=2, a=13, b=21, c=15, A=588, B=700, C=812.

ОТВЕТ:

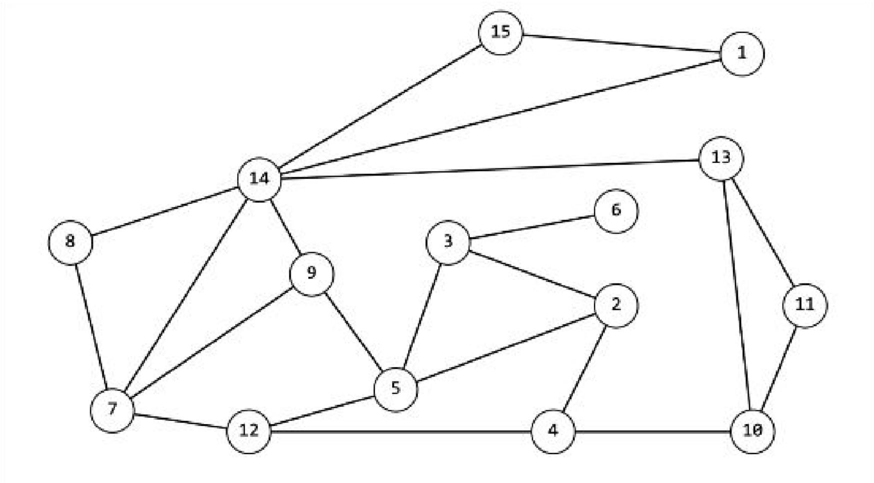
6122132115588700812

КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ:

Полное решение	20 баллов
Верно доказаны все предыдущие пункты и получен неверный ответ из-арифметической ошибки	18 баллов
Нашли B=700 и доказали ограничения для a, b, c, также доказали единственность решения	15 баллов
Нашли ограничения для a, b, c (за каждую букву по 3 балла)	9 баллов
Доказали, что B=700	1 балл
Отсутствует решение	0 баллов

Задание 3. (20 баллов)

Маршрутом будем называть последовательность различных ребер графа, где каждые два соседних ребра имеют общую вершину. Дан связный неориентированный граф, необходимо доказать, что в графе не существует маршрута по всем ребрам или предоставить его, если существует.



РЕШЕНИЕ:

Обратим внимание, что маршрут в контексте данной задачи – это последовательность ребер в графе. Существует маршрут, например: (1-15), (1-14), (14-15), (13-14), (9-14), (7-14), (8-14), (7-8), (7-9), (7-12), (4-12), (5-12), (5-9), (2-5), (3-5), (3-6), (2-3), (2-4), (4-10), (10-13), (10-11), (11-13)

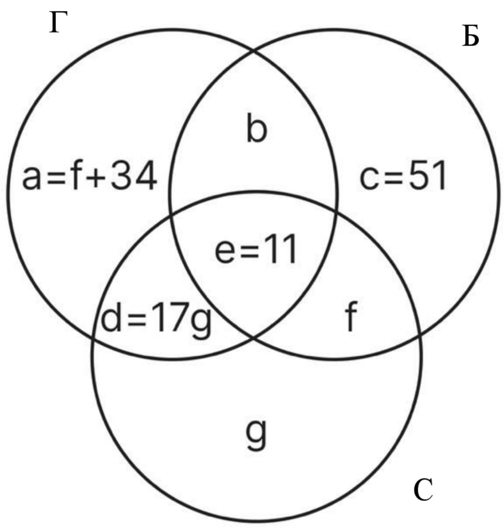
КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ:

Привели один из правильных вариантов ответа	20 баллов
Отсутствует решение. Или в решении пишут про Эйлеров путь. Или доказывают отсутствие маршрута через нечетность степеней вершин.	0 баллов

Задание 4. (20 баллов)

В музыкальной школе ученики играют на гитаре, барабанах и скрипке. Известно, что количество человек, которые играют и на барабанах, и на скрипке на 23 меньше, чем тех, кто играет только на гитаре. Тех, кто играет только на барабанах, на 40 человек больше тех, кто играет на всех инструментах сразу. Количество тех, кто играет и на гитаре, и на скрипке, но не играет на барабанах, в 17 раз больше тех, кто играет только на скрипке. Тех, кто играет на всех трех инструментах сразу, 11 человек. Также известно, что количество тех, кто играет на гитаре, не менее 229 и не более 237 человек, а тех, кто играет на барабанах, не менее 109 и не более 115 человек.
Укажите, на сколько человек количество играющих на гитаре превышает количество играющих на барабанах?

РЕШЕНИЕ:



Из условия задачи e+f+23 = a, e = 11, тогда a = f+34, также дано, что c-40 = e, тогда c = 40+11 = 51.
Также учтем далее то, что d = 17g.
Играющих на гитаре:
Г = a+b+d+e = f+34+b+d+11 = f+b+17g+45.
Играющих на барабанах Б = b+c+e+f = b+51+11+f = b+f+62.
Тогда Г – Б = f+17g+b+45 – (b+f+62) = 17g – 17 = 17(g – 1), получили то, что ответ должен быть кратен 17.
Дано: $229 \leq Г \leq 237$ и $109 \leq Б \leq 115$.
Значит:
$229\text{-}115 \leq Г – Б \leq 237\text{-}109$
$114 \leq Г – Б \leq 128$
Причем это значение должно быть кратно 17, как показано выше, значит ответ 119

ОТВЕТ:

119

КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ:

Полное решение	20 баллов
Доказали кратность 17	+4 балла
Верно оценили ответ сверху (128)	+4 балла
Верно оценили ответ снизу (114)	+4 балла
Верно начаты рассуждения (в зависимости от того, сколько доказали)	До 3 баллов
Отсутствует решение	0 баллов

Задание 5. (20 баллов)

Василий придумал алгоритм сортировки, который работает следующим образом:
1) В текущем неотсортированном массиве находятся минимальный и максимальный элементы.
2) Минимальный элемент помещается в начало массива, максимальный — в конец.
3) Границы неотсортированной области сдвигаются: левая граница увеличивается на 1, правая уменьшается на 1.
4) Шаги 1-3 повторяются до тех пор, пока не останется не более одного неотсортированного элемента.
Но учительнице такой способ не очень понравился, она предложила сначала разделить массив на две равные части, если количество элементов четное, иначе правую половинку взять на 1 элемент больше. Отсортировать две половинки и потом соединить два отсортированных подмассива в один массив так, чтобы он стал отсортированным.
Необходимо объяснить, как именно будут два подмассива сливаться в один на последнем шаге и определить минимальное количество сравнений элементов массива длины 100, если используется данный алгоритм сортировки?

<u>РЕШЕНИЕ:</u>
Пусть массив из 100 элементов разбит на две части:
левый подмассив: 50 элементов, отсортирован по возрастанию L
правый подмассив: 50 элементов, тоже отсортирован по возрастанию R
На шаге слияния:
Берутся два указателя:
i — на текущий элемент левого подмассива (изначально на первый),
j — на текущий элемент правого подмассива (изначально на первый).
Сравниваются элементы L[i] и R[j].
Если L[i] ≤ R[j], то L[i] записывается в результирующий массив, I увеличивается на 1.
Иначе записывается R[j], j увеличивается на 1.
Когда один подмассив исчерпан, оставшиеся элементы другого просто дописываются в конец результирующего массива без сравнений, так как внутри каждого подмассива элементы уже отсортированы.

Слияние двух отсортированных массивов длины m и n в худшем случае требует m + n – 1 сравнений. Здесь m = 50, n = 50 → максимум 99 сравнений.
А минимальное количество сравнений для массива длины 100 при данном алгоритме, то есть в наиболее благоприятной конфигурации элементов.
Минимум будет, когда один из подмассивов «полностью меньше» другого.
Например:
все 50 элементов левого подмассива меньше всех 50 элементов правого (или наоборот).
Тогда слияние пойдёт так:
сравнение 1: L[1] и R[1] → выясняется, что L[1] < R[1] дальше мы будем последовательно вытаскивать все элементы из левого подмассива по одному, каждый раз сравнивая текущий L[i] с тем же R[1], пока левый не закончится. Получается, что минимальное количество сравнений 50.

До этого два массива длиной по 50 должны быть также отсортированы алгоритмом Василия, будем считать, что за один проход он сохраняет максимальный и минимальный элемент, тогда для сортировки массива длины 50 необходимо 50+48+46+…+4+2 = (50+2)•25/2 = 650 сравнений, так как у нас два массива, то необходимо 650•2 = 1300 сравнений.

Получаем 1300+50 = 1350.

<u>ОТВЕТ:</u>

1350

<u>КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ:</u>

Полное решение	20 баллов
Правильно оценено минимальное количество сравнений на последнем шаге	+5 баллов
Верно посчитано количество сравнений по алгоритму Василия	+5 баллов
Правильно описано слияние двух массивов	+5 баллов
Отсутствует решение	0 баллов