11 класс

1. Про функцию f известно, что для каждого двузначного числа её значение равно одной из цифр этого числа (например, $f(13)$ может быть равно 1 или 3). А также для любых трёх ненулевых цифр a, b, c верно равенство

$$f(\overline{ab}) \cdot f(\overline{bc}) \cdot f(\overline{ca}) = abc.$$

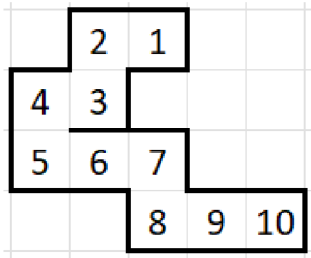
Найдите значение суммы

$$f(11) + \ldots + f(19) + f(21) + \ldots + f(29) + \ldots + f(91) + \ldots + f(99).$$ (20 баллов)

Решение: Для любой ненулевой цифры a верно $f(\overline{aa}) = a$. Возьмём различные цифры a, b и составим числа $\overline{ab}, \overline{bb}$ и $\overline{ba}$. По условию $f(\overline{ab}) \cdot f(\overline{bb}) \cdot f(\overline{ba}) = ab^2$, значит $f(\overline{ab}) \cdot f(\overline{ba}) = ab$. Это возможно только в случае, когда $f(\overline{ab})$ и $f(\overline{ba})$ равны a и b в каком-то порядке, следовательно $f(\overline{ab}) + f(\overline{ba}) = a + b$. Заметим тогда, что исходная сумма равна сумме всех цифр, умноженной на половину их количества. Каждая цифра встречается ровно 18 раз, значит искомая сумма равна $9(1 + 2 + \ldots + 9) = 405$.

Ответ: 405.

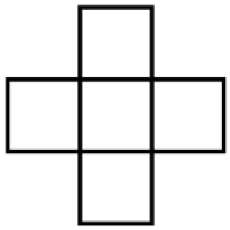
2. *Змейкой* называется клетчатая фигура, каждая клетка которой (начиная со второй) граничит с предыдущей клеткой по стороне. На рисунке приведён пример змейки из 10 клеток с указанием их порядка. Дима и Максим нашли клетчатое поле размером 2025×2025 клеток и по очереди рисуют на нём змеек длиной 8 клеток. Начинает Дима. Нельзя рисовать змеек в клетках, которые были использованы для уже нарисованных змеек. Проигрывает тот, кто больше не может нарисовать змейку. Кто из игроков выигрывает независимо от игры соперника? (20 баллов)



Решение: Пусть своим первым ходом Дима ограничит змейкой кольцо из восьми клеток вокруг центральной клетки поля, будем называть такую змейку *центральным кольцом*. В дальнейшем после любого хода Максима следующий ход Димы будет симметричен относительно этой центральной клетки. Докажем, что в свой ход Максим не сможет провести змейку через две центрально-симметричные клетки. Если клетка примыкает к центральному кольцу, то до центрально-симметричной клетки ей нужно пройти хотя бы половину периметра кольца, примыкающего к центральному кольцу, то есть её путь состоит хотя бы из 8 клеток, а сама змейка в таком случае – хотя бы из 9 клеток. Для всех остальных клеток либо весь путь будет проходить по полупериметру ещё большего кольца, либо задействовать клетки предыдущего кольца, но тогда мы можем заменить такие клетки в пути на клетки следующего кольца и путь будет такой же длины. Значит Дима всегда сможет сделать симметричный ход и не сможет проиграть. Игра закончится, когда кто-то не сможет сделать ход, и это может быть только Максим. Значит побеждает Дима.

Ответ: Дима.

3. Доска размером 8×8 разбита на единичные квадраты. Какое наименьшее количество пятиклеточных крестов (см. рисунок) можно вырезать из этой доски так, чтобы из оставшейся части нельзя было вырезать ещё один такой крест? (20 баллов)



Решение: Выделим кресты, как показано на рисунке «Оценка». Заметим, что любой вырезанный крест пересекает не более одного выделенного креста. Значит после вырезания трёх и менее крестов всегда можно будет вырезать четвёртый, например, в одном из выделенных мест. На рисунке «Пример» можно увидеть четыре вырезанных креста без возможности вырезать пятый.

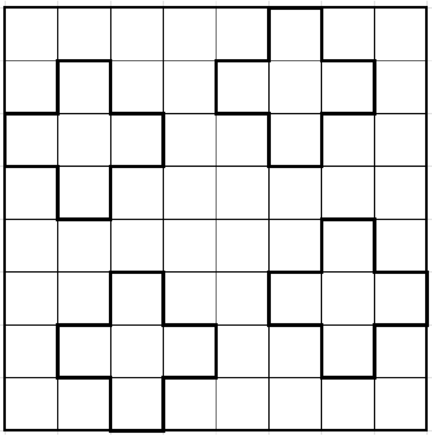


Рис. Оценка

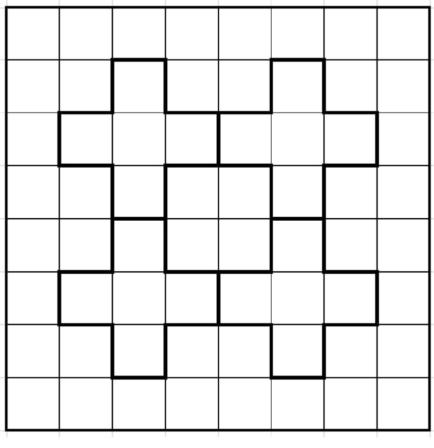


Рис. Пример

Ответ: 4.

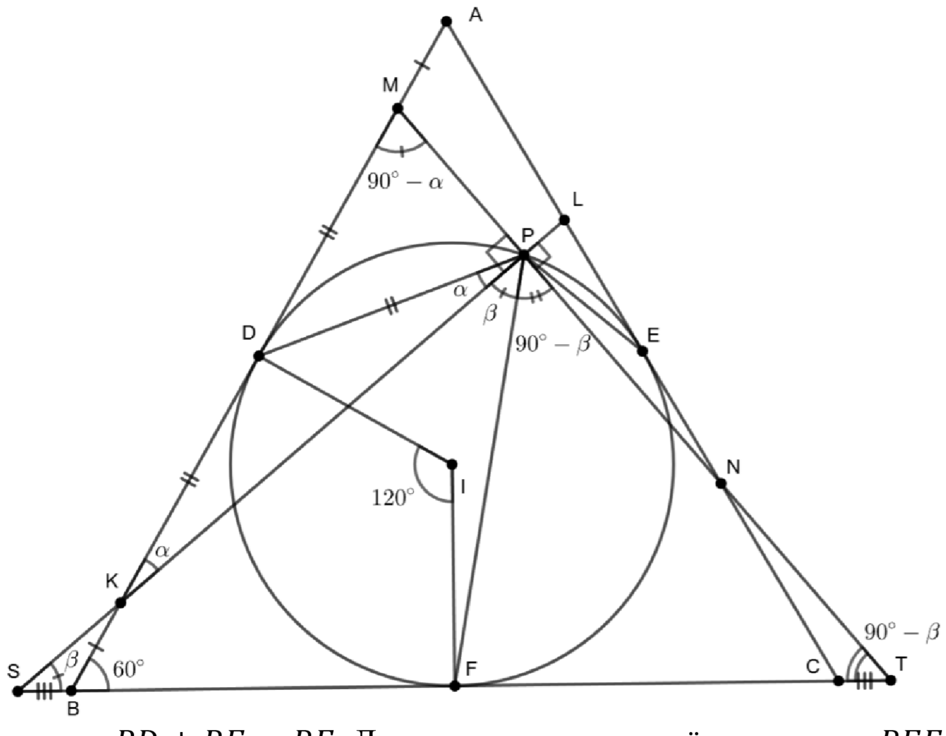
4. Вписанная окружность равностороннего треугольника ABC касается его сторон AB, AC и BC в точках D, E и F соответственно. На дуге DE, не содержащей точку F, отметили точку P. Через точку P провели две взаимно перпендикулярные прямые l_1 и l_2. Прямая l_1 пересекла стороны AB и AC в точках K и L соответственно, а прямую BC – в точке S.

Прямая l_2 пересекла стороны AB и AC в точках M и N соответственно, а прямую BC – в точке T. Оказалось, что $BS = CT$. Докажите, что $MK + LN = ST$. (20 баллов)

Решение: Поскольку треугольник ABC – равносторонний, точки D, E и F – середины сторон AB, AC и BC, значит $SF = FT$. В прямоугольном треугольнике PST отрезок PF – медиана, значит $PF = FS = FT$. Пусть $\angle DPK = \alpha, \angle FSP = \beta$, тогда $\angle SPF = \beta, \angle FPD = \angle FTP = 90° - \beta$ и $\angle DPM = 90° - \alpha$. Обозначим через I центр вписанной окружности ABC. Четырёхугольник $DIFB$ – вписанный, значит $\angle DIF = 120°$. Тогда $\alpha + \beta = \angle DPF = \frac{1}{2}\angle DIE = 60°$. В треугольнике BMT имеем:

$$\angle BMT = 180° - \angle FTP - \angle MBT = 90° - \alpha = \angle DPM.$$

Значит DPM – равнобедренный и $\angle MKP = 90° - \angle KMP = \alpha = \angle DPK$, отсюда $KD = DP = DM$. Аналогично доказывается, что $EN = PE = EL$. Тогда равенство, которое необходимо



доказать, равносильно $PD + PE = PF$. Для вписанного четырёхугольника $PEFD$ применим теорему Птолемея:

$$DP \cdot EF + DF \cdot EP = DE \cdot PF,$$

а поскольку треугольник DEF равносторонний, получаем требуемое.

Замечание 1: Теорема Птолемея принимается без доказательства.

Замечание 2: Если на дуге AB, не содержащей точку C, описанной окружности равностороннего треугольника ABC взять точку P, то $PA + PB = PC$. Данный факт называется *теоремой Помпею*, которая также принимается без доказательства.

5. Даны два множества: $A = (0;1) \cup (2;3) \cup (4;5)$ и $B = (1;2) \cup (3;4) \cup (5;6)$. Найдите все значения параметра k, при которых уравнение $(k-2)x^2 + (k-1)^2x + k = 0$ имеет два корня x_1, x_2 такие, что $x_1 \in A$ и $x_2 \in B$. (20 баллов)

Решение: Если $k = 2$, то уравнение будет линейным: $x + 2 = 0$ – у него только один корень. Рассмотрим функцию $f(x) = (k-2)x^2 + (k-1)^2x + k$, графиком которой является парабола, и заметим, что $f(x) = \big((k-2)x + 1\big)(x + k)$.

Пусть $k > 2$, тогда ветви параболы направлены вверх. Если $x_1 \in A$ и $x_2 \in B$, то среди чисел $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ больше x_1 чётное количество и меньше него – нечётное, больше x_2 нечётное количество и меньше него – чётное. Поэтому на отрезке с концами x_1 и x_2 находится нечётное количество чисел среди $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, а вне этого отрезка – чётное. Во всех точках отрезка с концами x_1 и x_2 функция $f(x)$ принимает отрицательные значения, а вне отрезка – положительные. Если $k < 2$, то наоборот. Значит

$$(k-2) \cdot f(0) \cdot f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdot f(4) \cdot f(5) \cdot f(6) < 0.$$

При этом в точках с абсциссами 0 и 6 знак функции должен совпадать со знаком $k - 2$, значит

$$(k-2) \cdot f(0) > 0, (k-2) \cdot f(6) > 0.$$

Вдобавок, абсцисса вершины параболы должна лежать в интервале $(0;6)$ и для существования двух различных корней дискриминант должен быть положительным. В итоге получим систему

$$\begin{cases} (k-2) \cdot f(0) \cdot f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdot f(4) \cdot f(5) \cdot f(6) < 0 \\ (k-2) \cdot f(0) > 0 \\ (k-2) \cdot f(6) > 0 \\ 0 < -\dfrac{(k-1)^2}{2(k-2)} < 6 \\ (k-1)^4 - 4k(k-2) > 0 \end{cases}.$$

Из четвёртого неравенства следует, что $k - 2 < 0$. Тогда из $\frac{(k-1)^2}{2(2-k)} < 6$ следует $(k-1)^2 < 12(2-k)$, то есть $k^2 + 10k - 23 < 0$. Решением неравенства является $-4\sqrt{3} - 5 < k < 4\sqrt{3} - 5$.

Пятое неравенство запишется в виде $(k^2 - 2k + 1)^2 - 4(k^2 - 2k) > 0$. Пусть $t = k^2 - 2k$, тогда оно примет вид $(t+1)^2 - 4t > 0$, что равносильно $(t-1)^2 > 0$, откуда $t \neq 1$. Значит $k^2 - 2k - 1 \neq 0$ и $k \neq 2 \pm \sqrt{2}$. Но $k < 2$, значит $k \neq 2 - \sqrt{2}$.

Теперь система упростится до вида

$$\begin{cases} f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot f(4)\cdot f(5)>0 \\ f(0)<0 \\ f(6)<0 \\ -4\sqrt{3}-5<k<4\sqrt{3}-5 \\ k\neq 2-\sqrt{2} \end{cases}.$$

Второе и третье неравенства запишутся как $k<0$ и $(6k-11)(k+6)<0$. Решением такой системы будет $-6<k<0$.

Первое неравенство перепишется в виде

$$(k-1)(k+1)\cdot(2k-3)(k+2)\cdot(3k-5)(k+3)\cdot(4k-7)(k+4)\cdot(5k-9)(k+5)>0.$$

Решив неравенство методом интервалов, помня, что $-6<k<0$, получим

$$k\in(-6;-5)\cup(-4;-3)\cup(-2;-1).$$

Поскольку $-4\sqrt{3}-5<-6, 4\sqrt{3}-5>-1$ и $2-\sqrt{2}>0$ никаких решений не пропадёт.

Ответ: $\boldsymbol{k\in(-6;-5)\cup(-4;-3)\cup(-2;-1)}$**.**

Замечание: Некоторые неравенства в системе в процессе решения оказались «лишними», однако в общем случае подобной задачи необходимо учитывать их всех.

Критерии проверки

Задача 1

Полное решение	20 баллов
Доказано, что существует только две функции, удовлетворяющие условию задачи	15 баллов
В верном решении с правильным ответом отсутствует доказательство того, что $f(ab)+f(ba)=a+b$ или аналогично с тройкой функций	10 баллов
Доказано, что $f(ab)+f(ba)=a+b$	5 баллов
Приведён пример подходящей функции и получен верный ответ	3 балла
Арифметическая ошибка в верном решении	-2 балла

Задача 2

Верная стратегия за Диму с обоснованием	20 баллов
Верная стратегия за Диму без обоснования	8 баллов
Любая стратегия за Максима	0 баллов

Задача 3

Полное решение	20 баллов
Оценка без примера	12 баллов
Верный пример	5 баллов

Задача 4

Специальных критериев нет

Задача 5

Полное решение	20 баллов
При переборе вариантов расположения корней получен верный ответ, но потеряны случаи, когда корень из множества B меньше корня из множества A	10 баллов
Найдены корни уравнения или получено разложение квадратного трёхчлена на линейные множители	7 баллов
Доказано, что $k < 2$ (не суммируется с другими критериями)	3 балла
Доказано, что $k < 0$ (не суммируется с другими критериями)	5 баллов

10 класс

1. Про функцию f известно, что для каждого двузначного числа её значение равно одной из цифр этого числа (например, $f(13)$ может быть равно 1 или 3). А также для любых трёх ненулевых цифр a, b, c верно равенство
$$f(\overline{ab}) \cdot f(\overline{bc}) \cdot f(\overline{ca}) = abc.$$
Найдите значение суммы
$$f(11) + \ldots + f(19) + f(21) + \ldots + f(29) + \ldots + f(91) + \ldots + f(99).$$ (20 баллов)
Решение: Для любой ненулевой цифры a верно $f(\overline{aa}) = a$. Возьмём различные цифры a, b и составим числа $\overline{ab}, \overline{bb}$ и $\overline{ba}$. По условию $f(\overline{ab}) \cdot f(\overline{bb}) \cdot f(\overline{ba}) = ab^2$, значит $f(\overline{ab}) \cdot f(\overline{ba}) = ab$. Это возможно только в случае, когда $f(\overline{ab})$ и $f(\overline{ba})$ равны a и b в каком-то порядке, следовательно $f(\overline{ab}) + f(\overline{ba}) = a + b$. Заметим тогда, что исходная сумма равна сумме всех цифр, умноженной на половину их количества. Каждая цифра встречается ровно 18 раз, значит искомая сумма равна $9(1 + 2 + \ldots + 9) = 405$.
Ответ: 405.

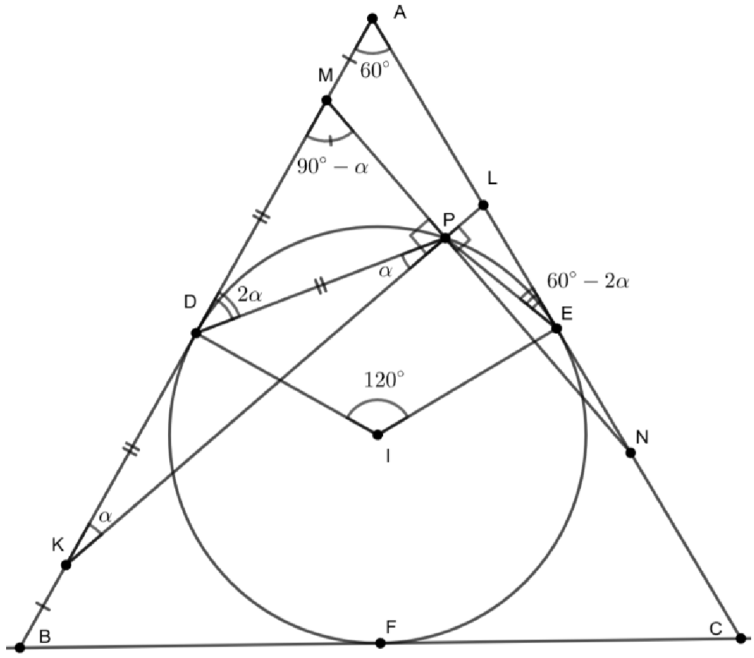
2. На телевизионном шоу ведущий предложил участнику сыграть в следующую игру. Ведущий выложил в ряд пять мешочков, в которых лежит 1, 2, 3, 4 и 5 золотых монет, причём известно, что в любых двух соседних мешочках количество золотых монет отличается не более чем на 2. За одну попытку участник может выбрать любое количество любых имеющихся мешочков и спросить, сколько в них суммарно золотых монет. Как за две попытки участнику определить, в каком из мешочков лежат пять золотых монет? (20 баллов)
Решение: Если мешочек с пятью монетами лежит не с краю, то он обязан лежать между мешочками с тремя и четырьмя монетами. За две попытки спрашиваем про два крайних мешочка. Если в одном из них пять монет, участник победил. Иначе если в одном из крайних мешочков 3 или 4 монеты (причём это не может произойти одновременно), то нужный мешочек соседний с этим крайним. Если же в крайних мешочках 1 и 2 монеты, то нужный мешочек лежит в центре.

3. Бесконечная последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ определяется следующим образом: $a_1 = 1, a_2 = 2$, а каждый следующий член последовательности a_n подбирается

так, что $a_n + a_{n-1}$ – составное число, причём a_n – наименьшее, не встречавшееся ранее, натуральное число. Докажите, что в этой последовательности встретятся все натуральные числа. (20 баллов)

Решение: Возьмём последовательность, удовлетворяющую условиям задачи, и предположим, что есть натуральное число, которое в ней не встретилось. Если таких чисел несколько, возьмём среди них минимальное и назовём его x. Рассмотрим индекс k такой, что среди членов последовательности от a_1 до a_k встречаются все числа от 1 до $x-1$. Если a_k и x одинаковой чётности, то $a_{k+1} = x$. Иначе все члены последовательности, начиная с a_k, одной чётности, отличной от чётности x. Поскольку до a_k выписано конечное количество чисел каждой чётности, то начиная с некоторого номера все числа этой же чётности ещё не встречались в последовательности. Пусть такое число a_m, тогда $a_{m+1} = a_m + 2$ и $a_{m+2} = a_m + 4$. Числа a_m, a_{m+1}, a_{m+2} имеют разные остатки при делении на три, а значит какое-то из них в сумме с x делится на три, причём x меньше каждого из них – противоречие. Следовательно, каждое натуральное число в последовательности есть.

4. Вписанная окружность равностороннего треугольника ABC касается его сторон AB, AC и BC в точках D, E и F соответственно. На дуге DE, не содержащей точку F, отметили точку P. Через точку P провели две взаимно перпендикулярные прямые l_1 и l_2. Прямая l_1 пересекла стороны AB и AC в точках K и L соответственно. Прямая l_2 пересекла стороны AB и AC в точках M и N соответственно. Оказалось, что $AM = BK$. Докажите, что $AL = CN$. (20 баллов)



Решение: Поскольку треугольник ABC – равносторонний, точки D и E – середины сторон AB и AC, значит $MD = DK$. В прямоугольном треугольнике PMK отрезок PD – медиана, значит $PD = MD = DK$. Пусть $\angle PKD = \alpha$, тогда $\angle DPK = \alpha, \angle PDM = 2\alpha, \angle PMD = 90° - \alpha$. Обозначим через I центр вписанной окружности ABC.

Четырёхугольник $ADIE$ – вписанный, значит $\angle DIE = 120°$. Тогда $\angle ADP + \angle AEP = \frac{1}{2}\angle DIE$ и $\angle AEP = 60° - 2\alpha$. Вычислим угол PLE через сумму углов $ALPM$:

$$\angle PLE = 180° - \angle PLA = 180° - (360° - 60° - 120° - \angle PMA) = 60° + \alpha.$$

В треугольнике PLE имеем $\angle LPE = 180° - \angle PLE - \angle LEP = 60° + \alpha = \angle PLE$. Значит $PE = EL$, а поскольку треугольник LPN – прямоугольный, то

$$\angle EPN = 90° - \angle LPE = 90° - \angle PLE = \angle ENP,$$

откуда $EN = EP$, то есть E – середина отрезка LN. Но она же середина отрезка AC, а значит $AL = CN$.

5. Сколькими способами можно поставить в клетки доски $2n \times 2n$ ладью и слона так, чтобы ни одна из фигур не била другую? Напомним, что ладья бьёт все клетки по горизонтали и вертикали, а слон бьёт все клетки по обеим диагоналям. (20 баллов)

Решение: Будем ставить ладью в какую-то клетку и для каждой поставленной ладьи вычислять количество клеток, в которые нельзя поставить слона. Это будут все клетки, находящиеся с ладьёй в одной горизонтали и вертикали (чтобы ладья не била слона), а также все клетки, находящиеся с ладьёй в тех же диагоналях (чтобы слон не бил ладью). Разделим доску на «рамки» из клеток. Первая рамка состоит из граничных клеток квадрата, а каждая следующая – из границ квадрата на 2 клетки меньшего размера (см. рисунок). Пусть ладья стоит в верхней-левой клетке какой-то рамки. Сдвинув ладью на одну клетку вправо, длина одной из диагоналей, содержащей ладью, уменьшится на 1, а другой – увеличится на 1, таким образом число запрещённых клеток для ладей будет одинаковым. Аналогично для всех клеток верхней стороны рамки. Дойдя до правого-верхнего угла, проделаем аналогичные рассуждения для следующей стороны рамки, и так пока не обойдём весь контур. Значит число запрещённых позиций для клеток каждой из рамок такое же, как и для верхней-левой клетки рамки. Пронумеруем рамки числа от 1 до n, начиная с самой большой. Число клеток в первой рамке равно $8n - 4$, а в каждой следующей – на 8 клеток меньше, значит в рамке с номером k всего $8(n - k + 1) - 4 = 8(n - k) + 4$ клеток. Число запрещённых позиций по вертикали и горизонтали для всех клеток доски одинаковое и равно $4n - 1$. Число запрещённых позиций по диагоналям для клеток первой рамки равно $2n - 1$ (так как саму клетку мы считали в вертикальных и горизонтальных), а для каждой следующей рамки – на 2 больше, значит для клеток в рамке с номером k всего $4n - 1 + 2(n + k - 1) - 1 = 6n + 2k - 4$ запрещённых позиций.

Итого вариантов расстановки ладьи и слона, в которых одна из фигур бьёт другую, равно

$$\sum_{k=1}^{n}(8(n-k)+4)\cdot(6n+2k-4)=\sum_{k=1}^{n}(48n^2-(32k+8)n-16k^2+40k-16)=$$

$$=48n^3-32n\sum_{k=1}^{n}k-8n^2-16\sum_{k=1}^{n}k^2+40\sum_{k=1}^{n}k-16n=$$

$$=48n^3-16n^2(n+1)-8n^2-16\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+20n(n+1)-16n=$$

$$=\frac{80n^3-36n^2+4n}{3}.$$

Здесь мы воспользовались формулой суммы квадратов первых n натуральных чисел, а именно

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Всего число способов поставить ладью и слона на доску равно $4n^2\cdot 4n^2=16n^4$ (мы учитываем вариант с совпадающими клетками, поскольку до этого учитывали его в подсчёте пар запрещённых позиций). А значит число интересующих нас способов равно

$$16n^4-\frac{80n^3-36n^2+4n}{3}=\frac{48n^4-80n^3+36n^2-4n}{3}.$$

Ответ: $\boldsymbol{\frac{48n^4-80n^3+36n^2-4n}{3}}$.

Критерии проверки

Задача 1

Полное решение	20 баллов
Доказано, что существует только две функции, удовлетворяющие условию задачи	15 баллов
В верном решении с правильным ответом отсутствует доказательство того, что $f(ab)+f(ba)=a+b$ или аналогично с тройкой функций	10 баллов
Доказано, что $f(ab)+f(ba)=a+b$	5 баллов
Приведён пример подходящей функции и получен верный ответ	3 балла
Арифметическая ошибка в верном решении	-2 балла

Задача 2

Верный алгоритм поиска мешочка с доказательством	20 баллов
При доказательстве алгоритма упущен 1 случай, не влияющий на работу алгоритма	17 баллов
Верный алгоритм поиска без обоснования, либо с неполным обоснованием, содержащем ошибки	8 баллов

Неверный алгоритм поиска мешочка	0 баллов

Задача 3

Полное решение	20 баллов
Доказано, что в качестве следующего члена последовательности подойдёт любое число той же чётности, что и предыдущий член	3 балла

Задача 4

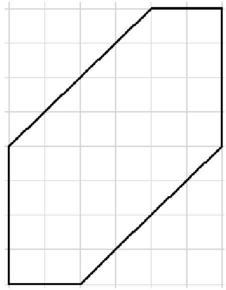
Полное решение	20 баллов

Задача 5

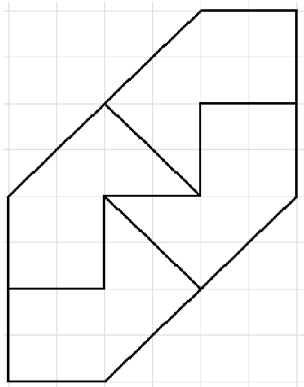
Верно составлена формула в незамкнутом виде для подсчёта требуемых пар	8 баллов
Верно посчитано число подходящих пар в случае, когда ладья стоит с краю доски	3 балла
Задача сведена к расстановке на доске двух ферзей. Замечено, что количество клеток, которые бьёт ферзь, константа в каждой квадратной рамке и увеличивается на 2 при переходе к меньшей рамке	3 балла

9 класс

1. Разрежьте фигурку, изображённую на рисунке, на 4 равные части. Разрезы могут проходить не по линиям сетки. (20 баллов)



Решение:



2. Дан равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине A. Пусть M и L – точки пересечения медиан и биссектрис соответственно треугольника ABC. Известно, что $ML = 1$. Найдите длину отрезка BC. (20 баллов)

Решение: Пусть H – основание высоты, проведённой из вершины A к гипотенузе BC. Тогда AH – медиана и $BH = CH = AH$. По теореме Пифагора $AH^2 + BH^2 = 2BH^2 = AB^2$. Тогда $AB{:}\,BH = \sqrt{2}$. По теореме о биссектрисе $AL{:}\,LH = AB{:}\,BH = \sqrt{2}$, значит $LH = \frac{AL}{\sqrt{2}}$ и

$AH = AL + LH = AL\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $AL = AH \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = AH \cdot (2 - \sqrt{2})$. По свойству точки пересечения медиан $AM = \frac{2}{3}AH$. Следовательно,

$$1 = ML = AM - AL = \frac{2}{3}AH - AH \cdot \left(2 - \sqrt{2}\right) = AH \cdot \left(\sqrt{2} - \frac{4}{3}\right) = AH \cdot \frac{3\sqrt{2} - 4}{3}$$

и $BC = 2AH = \frac{6}{3\sqrt{2}-4} = 3\left(3\sqrt{2} + 4\right)$.

Ответ: $\boldsymbol{BC = 3\left(3\sqrt{2} + 4\right)}$**.**

3. В каждой клетке квадрата 8×8 записали число 0. Коля выбрал 8 клеток этого квадрата и заменил нули в этих клетках на числа $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ и 8, причём каждое число было использовано по одному разу. После этого сумма чисел в каждой строке осталась чётной, и сумма чисел в каждом столбце осталась чётной. Сколькими способами Коля мог таким образом заменить числа в таблице? (20 баллов)

Решение: Выберем клетку с нечётным числом. Сумма в строке и столбце, содержащих это нечётное число, должна быть чётной, значит в какой-то клетке этих строки и столбца есть нечётное число. Назовём выбранную клетку в строке a, а клетку в столбце – b. Суммы в столбце с клеткой a и в строке с клеткой b должны быть чётными, значит на их пересечении стоит оставшееся нечётное число. В итоге нечётные числа стоят в вершинах прямоугольника. Число способов выбрать прямоугольник равно числу способов выбрать две строки и два столбца, содержащих стороны этого прямоугольника, то есть $\frac{8\cdot 7}{2}\cdot\frac{8\cdot 7}{2} = 28^2$ способов, а способов расставить нечётные числа в его вершинах – $4! = 24$. Чётные числа можно поставить в любые из оставшихся 60 клеток $60\cdot 59\cdot 58\cdot 57$ способами. Итого получаем $24\cdot 28^2\cdot 60\cdot 59\cdot 58\cdot 57$ способов.

Ответ: $\mathbf{24\cdot 28^2\cdot 60\cdot 59\cdot 58\cdot 57.}$

4. Гарри Поттер встретил на южном полюсе стадо из 2026 пингвинов. Он знает четыре заклинания. После первого заклинания количество пингвинов в стаде возрастает на 373, после второго – возрастает на 776, после третьего – уменьшается на 557, а после четвёртого – уменьшается на 712. Нельзя использовать заклинание, после которого число пингвинов станет отрицательным. За какое наименьшее число заклинаний Гарри Поттер может получить стадо из 2025 пингвинов? Гарри может использовать любое количество заклинаний в любом порядке. (20 баллов)

Решение: Заметим, что $776 = 25\cdot 31 + 1$, $373 = 12\cdot 31 + 1$, $-557 = -18\cdot 31 + 1$ и $-712 = -23\cdot 31 + 1$. Это означает, что после любого заклинания остаток от деления на 31 числа пингвинов увеличивается на 1. Чтобы из остатка числа получить остаток предыдущего числа, необходимо этот остаток увеличить хотя бы на 30, значит меньше 30 заклинаний не хватит.

Построим пример на 30 заклинаний: применим первое заклинание 7 раз, второе – 8 раз, третье – 12 раз, четвёртое – 3 раза. Действительно,

$$7\cdot 373 + 8\cdot 776 - 12\cdot 557 - 3\cdot 712 = -1.$$

Ответ: 30

Замечание: До рассмотрения числа 31 можно было догадаться, рассмотрев попарные разности между числами $373, 776, -557, -712$. Все такие разности нацело делятся на 31, что и влечёт совпадение остатков этих чисел при делении на 31.

5. Делитель натурального числа называется *собственным*, если он отличен от единицы и самого числа. Найдите все возможные значения составного натурального числа $n \geq 100$, если известно, что любой его собственный делитель d удовлетворяет неравенствам

$$\sqrt{n-100} < d < \sqrt{n+100}.$$ (20 баллов)

Решение: Пусть $n = p^2$, где p – простое число, большее 10. Тогда единственный его собственный делитель p, очевидно, удовлетворяет условию.

Если n – чётное, то у него есть делитель $d = 2$, и неравенство $\sqrt{n-100} < 2$ выполнится лишь при $n = 100$ и $n = 102$. Оба числа не подходят, так как их делители 50 и 51 соответственно больше $\sqrt{n+100}$. Значит n – нечётное.

Если $n = pq$, где $q > p$ – различные простые числа, то $q - p \geq 2$. Тогда

$$q^2 < pq + 100 \leq (q-2)q + 100,$$

из чего следует $2q < 100$, то есть $q < 50$. Также из неравенства $q^2 < pq + 100$ следует $q(q-p) < 100$. Выпишем все нечётные простые числа до 50:

$$3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.$$

Если $q \geq 29$, то разность $q - p$ не может быть 4 или больше, а значит подойдут числа $41 \cdot 43 = 1763, 29 \cdot 31 = 899$.

Если $q \geq 17$, то разность $q - p$ не может быть 6 или больше, а значит подойдут числа $19 \cdot 23 = 437, 19 \cdot 17 = 323, 13 \cdot 17 = 221$.

Если $q = 13$, то подойдёт только число $11 \cdot 13 = 143$.

Остальные значения не подойдут, так как тогда $pq < 100$.

Если $n = abc$, где a, b, c – собственные делители (возможно, совпадающие) числа n. Тогда перемножая неравенства с правым корнем для чисел ab, bc, ca, получим $n^2 = a^2b^2c^2 < \left(\sqrt{n+100}\right)^3$. Поскольку $n \geq 100$, то $n + 100 > (abc)^{\frac{4}{3}} > 64^{\frac{4}{3}} = 256$, откуда $n > 156$.

Аналогично, перемножая неравенства с левым корнем для чисел a, b, c, получим $\left(\sqrt{n-100}\right)^3 < abc = n$. Возведя обе части в квадрат и приведя подобные, получим

$$n^3 - 301n^2 + 30000n - 1000000 = (n-125)(n(n-176) + 8000) < 0.$$

Выражение в первой скобке положительное, а во второй равно $(n-88)^2 + 256 > 0$.

Значит неравенство не выполняется и чисел в этом случае нет.

Ответ: $\boldsymbol{n = p^2}$, где $\boldsymbol{p \geq 11}$ – простое, и числа $\mathbf{143, 221, 323, 437, 899, 1763}$.

Критерии проверки

Задача 1

Верный пример разрезания фигуры	20 баллов
Указана форма частей, на которые надо резать фигуру, однако самого разрезания нет	5 баллов
Неверный пример разрезания фигуры	0 баллов

Задача 2

Полное решение	20 баллов
Правильно посчитана длина катета вместо гипотенузы	Баллы не снимаются
Арифметическая ошибка при нахождении AL. В остальном решение верное	8 баллов
Верно составлено уравнение для нахождения MH	8 баллов
Арифметические ошибки при подсчёте гипотенузы	снимается 2 балла

Задача 3

Полное решение	20 баллов
При верном подсчёте подходящих вариантов подсчитаны лишние способы расположения нечётных чисел в одной строчке или столбце	17 баллов
Доказано, что нечётные числа расположены в вершинах прямоугольника со сторонами, параллельными сторонам квадрата. Подсчёт количества прямоугольников произведён неверно, но верно подсчитано число способов расставить оставшиеся чётные числа	10 баллов
Сказано, но не доказано, что число прямоугольников равно 28^2. Остальное верно	10 баллов
Верно посчитано количество способов расставить нечётные числа внутри прямоугольника	5 баллов
Верно посчитано количество способов выбрать прямоугольник	5 баллов
Доказано, что нечётные числа расположены в вершинах прямоугольника со сторонами, параллельными сторонам квадрата	3 балла

Указанные продвижения не суммируются!

Задача 4

Верный алгоритм из 30 заклинаний без доказательства минимальности	8 баллов
Верный алгоритм получения 2025 за любое количество операций	3 балла

Задача 5

Доказано, что при простом $p \geq 11$ число $n = p^2$ является решением	3 балла
Получены все ответы вида $n = pq$, где p и q – различные простые числа, без доказательства того, что других таких чисел больше нет	3 балла

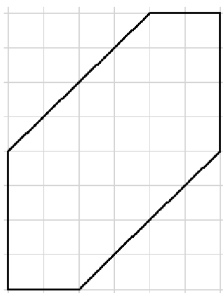
8 класс

1. В комнате было 10 человек, каждый из которых является либо рыцарем, которые всегда говорят правду, либо лжецом, которые всегда лгут. Они начали по очереди выходить из комнаты. Первый вышел и сказал: «В комнате осталось 0 рыцарей». Второй вышел и сказал: «В комнате остался 1 рыцарь». Третий вышел и сказал: «В комнате осталось 2 рыцаря», и так далее. Десятый вышел и сказал: «В комнате осталось 9 рыцарей». Сколько рыцарей было в комнате изначально? (20 баллов)

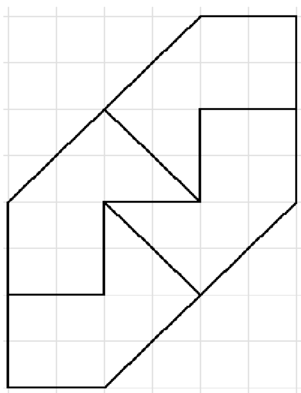
   Решение: Если рыцарей не было, то первый вышедший сказал бы правду – противоречие. Значит есть хотя бы один рыцарь. Пусть рыцарей хотя бы двое. После выхода второго рыцаря осталось ещё меньше рыцарей, чем после выхода первого, однако второй называет большее число оставшихся рыцарей – противоречие. Следовательно рыцарь мог быть только один. Такое могло быть, если он выходил первым.

   Ответ: один.

2. Разрежьте фигурку, изображённую на рисунке, на 4 равные части. Разрезы могут проходить не по линиям сетки. (20 баллов)



   Решение:



3. Дан равнобедренный треугольник ABC. На сторонах AB, BC и AC выбраны соответственно точки D, E и F. Оказалось, что

$$\angle CEF = 2\angle CFE, \angle BED = 3\angle CFE, \angle BDE = 4\angle CFE.$$

   Найдите углы треугольника ABC. (20 баллов)

   Решение: Обозначим $\angle CFE = \alpha$, тогда $\angle CEF = 2\alpha, \angle BED = 3\alpha, \angle BDE = 4\alpha$. По сумме углов в треугольниках BDE и CFE получим $\angle C = 180^{\circ} - 3\alpha, \angle B = 180^{\circ} - 7\alpha$. По сумме углов в треугольнике ABC получим $\angle A = 10\alpha - 180^{\circ}$. Ясно, что $\angle B \neq \angle C$. Рассмотрим два случая:

1) Пусть $\angle A = \angle C$. Тогда $10\alpha - 180^\circ = 180^\circ - 3\alpha$, откуда $\alpha = \frac{360^\circ}{13}$. Но в таком случае $\angle B = 180^\circ - 7 \cdot \frac{360^\circ}{13} = -\frac{180^\circ}{13} < 0$ – противоречие.
2) Пусть $\angle A = \angle B$. Тогда $10\alpha - 180^\circ = 180^\circ - 7\alpha$, откуда $\alpha = \frac{360^\circ}{17}$. Такой треугольник существует, два его угла равны $10 \cdot \frac{360^\circ}{17} - 180^\circ = \frac{540^\circ}{17}$ и ещё один равен $180^\circ - 3 \cdot \frac{360^\circ}{17} = \frac{1980^\circ}{17}$.

Ответ: $\frac{540^\circ}{17}, \frac{540^\circ}{17}, \frac{1980^\circ}{17}$.

Замечание. Доказательство существования треугольника можно опустить, поскольку он единственный, а из условия задачи следует, что такой есть.

4. Существуют ли такие различные натуральные числа k, l, m, что выполняется равенство
$$\frac{1}{k!} + \frac{2}{l!} = \frac{3}{m!}?$$
Напомним, что $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. (20 баллов)

Решение: Среди k, l, m число m не может быть наибольшим, иначе $\frac{1}{k!} + \frac{2}{l!} > \frac{1}{m!} + \frac{2}{m!} = \frac{3}{m!}$. Также число m не может быть наименьшим, иначе $\frac{1}{k!} + \frac{2}{l!} < \frac{1}{m!} + \frac{2}{m!} = \frac{3}{m!}$. Тогда m – среднее по величине. Рассмотрим случаи:

Случай 1. $k > m > l$, тогда $\frac{3}{m!} > \frac{2}{l!} \geq \frac{2}{(m-1)!}$, откуда $3(m-1)! > 2m!$, а значит $3 > 2m!$. Последнее неравенство выполняется только при $m = 1$, но тогда l не натуральное.

Случай 2. $l > m > k$, тогда $\frac{3}{m!} > \frac{1}{k!} \geq \frac{1}{(m-1)!}$, откуда $3(m-1)! > m!$, а значит $3 > m!$. Последнее неравенство выполняется только при $m \leq 2$. Случай с $m = 1$ невозможен, поскольку тогда k не натуральное. Если $m = 2$, то $k = 1$ и $\frac{1}{1!} + \frac{2}{l!} = \frac{3}{2!}$. Но тогда $l! = 4$, что невозможно. Следовательно, таких троек чисел k, l, m не существует.

Ответ: не существуют.

5. Мастеру Чо рассказали про фестиваль Кунг-Фу, который будет проходить в течение недели. Он узнал, что в нём будет участвовать 33 человека и каждый участник будет посещать фестиваль не менее 4 дней. Мастер Чо очень хочет показать свой стиль “Бешеного петуха”, но, к сожалению, он сможет посетить фестиваль лишь в какие-то 3 дня. Он уже узнал у всех

участников, в какой из дней каждый из них сможет прийти. Сможет ли мастер Чо выбрать три дня для посещения фестиваля так, чтобы каждый из участников смог узреть его невероятный стиль? (20 баллов)

Решение: Сопоставим каждому участнику фестиваля тройку дней, в которые этот участник не посетит фестиваль – таких троек всего 33. Если участник не увидит мастера Чо, значит выбранная мастером тройка дней совпадёт с тройкой участника. Троек дней, которые мастер Чо может посетить, всего $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{6} = 35$, значит хотя бы одна тройка не совпадёт ни с одной из троек участников – её мастер Чо и выберет.

Ответ: сможет.

Критерии проверки

Задача 1

Полное решение	20 баллов
Доказано, что рыцарей не больше одного	10 баллов
Верный ответ с проверкой	3 балла

Задача 2

Верный пример разрезания фигуры	20 баллов
Указана форма частей, на которые надо резать фигуру, однако самого разрезания нет	5 баллов
Неверный пример разрезания фигуры	0 баллов

Задача 3

Рассмотрен только случай AB=BC, при котором треугольника не существует	7 баллов
Углы треугольника ABC выражены через угол CFE (через альфа, икс и т. д.)	3 балла
Рассмотрен только случай AC=BC, при котором треугольник существует, и получен ответ	10 баллов
Рассмотрен случай равенства углов BAC и ACB и получено значение угла CFE, но дальнейших продвижений нет	5 баллов
Арифметические ошибки при вычислении углов	снимается 2 балла

Задача 4

Полное решение	20 баллов
Доказано, что m – не максимальная из трёх переменных	3 балла

Задача 5

Специальных критериев нет