

Перечень и содержание тем

Тема 1. Элементарные функции и графики

Декартова прямоугольная система координат. Понятие функции. Область определения, множество значений, график. Четные и нечетные функции. Периодические функции. Наименьший положительный период. Монотонные функции. Локальный экстремум. Преобразование графиков. Сдвиг, растяжение, зеркальная симметрия, центральная симметрия. Линейная функция, прямая. Уравнение прямой в различных формах. Угловой коэффициент прямой. Условия параллельности двух прямых на плоскости. Условия перпендикулярности двух прямых на плоскости. Квадратный трехчлен, парабола. Выделение полного квадрата. Промежутки возрастания, промежутки убывания, точка экстремума. Множество значений квадратного трехчлена. Дробно-линейная функция, гипербола. Асимптоты и оси симметрии гиперболы. Преобразование модуля, примененное к аргументу. Преобразование модуля, примененное к функции. Композиция линейной функции и модуля. Композиция квадратного трехчлена и модуля. Композиция дробно-линейной функции и модуля. Множества на плоскости. Параллельный перенос, растяжение. Зеркальная и центральная симметрия. Преобразование подобия. Свойства симметрии фигур, описываемых уравнениями и неравенствами с одним и несколькими модулями. Расстояние от точки до начала координат. Расстояние между двумя точками. Расстояние от прямой до начала координат. Расстояние от точки до прямой. Расстояние между параллельными прямыми. Фигуры на плоскости, определяемые уравнениями и неравенствами, включающими $|x|$ и $|y|$ в различных комбинациях. Уравнение окружности. Уравнение окружности со смещенным центром. Уравнение окружности с модулями.

Тема 2. Алгебраические уравнения

Линейные уравнения без параметра и с параметром. Квадратные уравнения. Условие разрешимости, условие единственного решения, условие неразрешимости. Различные формулы для корней квадратного уравнения. Теоремы Виета. Вычисление коэффициентов квадратного уравнения с заданными корнями. Вычисление симметрических функций от корней через коэффициенты. Квадратные уравнения с параметром. Уравнения, приводящиеся к квадратным с помощью замены переменной. Методы решения дробно-рациональных уравнений. Метод понижения порядка алгебраических уравнений. Биквадратные уравнения. Симметрические уравнения. Методы разложения на множители для уравнений старших степеней. Уравнения, содержащие знак абсолютной величины.

Тема 3. Алгебраические неравенства

Числовые неравенства. Равносильные преобразования неравенств. Линейные неравенства. Квадратные неравенства. Дробно-линейные неравенства. Неравенства, содержащие модуль и несколько модулей. Тождественные неравенства. Среднее арифметическое и среднее геометрическое двух неотрицательных чисел. Свойства суммы двух взаимно обратных чисел. Метод интервалов для многочлена. Метод интервалов для рациональной функции. Метод интервалов для иррациональной функции.

Тема 4. Системы алгебраических уравнений

Понятие равносильных систем, понятие следствия. Системы линейных алгебраических уравнений, имеющие единственное решение. Графический метод. Метод исключения неизвестных. Метод алгебраических преобразований. Вычисление линейной функции от решения линейной системы методом алгебраических преобразований. Простые текстовые задачи, приводящие к линейным системам. Системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными, не имеющие решений или

Математика

имеющие бесконечное множество решений. Геометрическая интерпретация. Линейные системы с параметром. Условие единственного решения, отсутствия решений, бесконечного числа решений. Системы, приводящиеся к линейным с помощью замены переменной. Виетовские системы. Метод решения, условие разрешимости. Системы, содержащие однородные уравнения. Симметрические системы. Метод замены переменных для решения систем.

Тема 5. Алгебраические выражения

Формулы сокращенного умножения и деления. Преобразование выражений с модулями. Разложение на множители числовых выражений. Разложение на множители выражений с параметрами. Деление многочленов с остатком. Преобразование дробно-рациональных выражений. Алгебраические выражения. Извлечение квадратного корня из полного квадрата числового выражения и выражения с параметром. Сложные радикалы. Избавление от иррациональности в знаменателе числового выражения и выражения с параметром. Сравнение иррациональных выражений. Числовые оценки иррациональных выражений без параметров.

Тема 6. Иррациональные уравнения и неравенства

Функция, график. Область определения, множество значений. Корни третьей, четвертой и старших степеней. Графический метод решения иррациональных уравнений и неравенств. Метод замены переменной. Использование одной и двух новых переменных. Использование монотонности и метод подбора при решении иррациональных уравнений и неравенств. Уравнения и неравенства с полным квадратом под знаком квадратного корня. Метод разложения на множители. Универсальный метод решения иррациональных неравенств. Иррациональные уравнения и неравенства. Метод эквивалентных преобразований для иррациональных уравнений и неравенств. Понятие эквивалентного преобразования. Основные типы иррациональных уравнений и неравенств. Метод неэквивалентных преобразований. Понятие следствия. Понятие проверки решения. Эффективные методы проверки.

Тема 7. Натуральные, целые, действительные числа

Деление натуральных чисел с остатком и без остатка. Простые числа. Разложение натурального числа на простые множители. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное. Десятичная запись натуральных и целых чисел. Признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 8, 9. Признаки делимости на составные числа 6, 10, 12, 18, 36, 45, 72 и т.д. Иррациональные числа. Иррациональность и некоторых других алгебраических констант. Множество действительных чисел, числовая прямая. Сравнение действительных чисел. Модуль действительного числа. Арифметические действия над обыкновенными и десятичными дробями. Приведение периодической десятичной дроби к рациональному виду. Представление рационального числа в виде периодической десятичной дроби. Линейные уравнения в целых числах (диофантовы уравнения). Системы линейных уравнений в целых числах. Нелинейные уравнения в целых числах. Системы нелинейных уравнений в целых числах. Условия целочисленности рациональной функции. Понятие объединения и пересечения множеств. Подсчет количества элементов множества, обладающих одновременно двумя свойствами. Подсчет количества элементов множества, обладающих одним из двух свойств.

Тема 8. Текстовые задачи

Понятие процентного отношения. Двукратное применение процентного отношения. Изменение процентного содержания одной из компонент в двухкомпонентной системе. Изменение процентного содержания одной из компонент в многокомпонентной системе. Основные

Математика

закономерности сложных процентов. Математические аспекты процесса прироста капитала в банке. Графическое изображение условий задачи. Элементарные задачи на движение одного объекта. Движение двух объектов с разными скоростями. Движение вниз и вверх по реке. Движение нескольких объектов по реке. Движение по замкнутой траектории (окружности). Работа и производительность труда одного участника. Совместная работа и производительность труда нескольких участников. Повышение и понижение производительности труда и связанное с этим изменение времени выполнения. Понятия выручки, расхода, дохода, прибыли. Текстовые задачи на вычисление экстремальных значений в задачах экономического содержания. Задачи, требующие выработки оптимальной стратегии. Понятие спроса и предложения. Задачи оптимизации при заданном соотношении спроса и предложения. Вычисление концентрации смеси двух растворов. Вычисление концентрации смеси трех растворов. Максимальные и минимальные значения концентрации при смешивании. Вычисление площади по радиусу описанного круга.

Тема 9. Тригонометрические функции и тригонометрические формулы

Тригонометрический круг. Измерение углов в радианах и градусах. Число π . Расположение точек 1, 2, 3, 4, 5, 6 радиан на тригонометрическом круге. Определение тригонометрических функций числового аргумента. Периодичность основных тригонометрических функций. Четные и нечетные функции. Промежутки возрастания и убывания. Наибольшие и наименьшие значения, множество значений. Графики тригонометрических функций. Формулы приведения. Формулы сложения и умножения. Формулы двойного и половинного угла. Вычисление тригонометрических функций для углов, кратных 15 градусам. Преобразование тригонометрических выражений с модулями. Корни основных тригонометрических функций. Знаки тригонометрических функций.

Тема 10. Тригонометрические уравнения и неравенства

Уравнения вида $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$. Тригонометрические уравнения, разлагающиеся на множители. Применение формул двойного и половинного угла. Метод вспомогательного угла. Элементарные тригонометрические неравенства. Тригонометрические уравнения, приводящиеся к квадратным. Тригонометрические неравенства, приводящиеся к квадратным. Тригонометрические неравенства, разлагающиеся на множители. Тригонометрические неравенства, решаемые методом замены переменной.

Тема 11. Методы решения тригонометрических уравнений и неравенств

Методы решения тригонометрических уравнений. Применение преобразования суммы в произведение. Применение преобразования произведения в сумму. Отбор общих корней в нескольких сериях решений тригонометрических уравнений. Иррациональные уравнения с тригонометрическими функциями. Понижение порядка тригонометрических уравнений. Метод мажорант в тригонометрии. Тригонометрические уравнения и неравенства с параметром. Системы тригонометрических уравнений и неравенств.

Тема 12. Обратные тригонометрические функции

Область определения и множество значений обратных функций. Формулы сложения обратных функций. Композиция тригонометрической функции и обратной тригонометрической функции. Композиция обратной тригонометрической функции и тригонометрической функции. Простейшие уравнения с обратными функциями. Простейшие неравенства с обратными функциями. Квадратные уравнения и неравенства с обратными функциями.

Тема 13. Планиметрические задачи, треугольники

Международная олимпиада школьников УрФУ «Изумруд»

Математика

Прямоугольный треугольник. Теорема Пифагора. Тригонометрические соотношения в прямоугольном треугольнике. Равнобедренный треугольник. Вычисление радиусов вписанного и описанного круга. Основные свойства биссектрисы. Вычисление длины биссектрисы. Основные свойства медианы. Вычисление длины медианы. Основные свойства высоты. Вычисление длины высоты. Вписанная и описанная окружности. Вычисление площади по двум сторонам и углу между ними. Вычисление площади по стороне и двум прилежащим углам. Вычисление площади по трем сторонам. Формула Герона. Вычисление площади по радиусу вписанного круга.

Тема 14. Показательная и логарифмическая функции

Свойства степеней с рациональным показателем. Понятие о степени с произвольным показателем. Показательная функция. Свойства степеней с произвольным показателем. Сравнение значений показательной функции. Множество значений квадратного трехчлена с показательной функцией. Множество значений многочлена с показательной функцией. Множество значений показательной функции с квадратным трехчленом в показателе. Определение логарифма и его свойства. Логарифмическая функция. Логарифмические тождества. Преобразование логарифмических выражений. Сравнение логарифмов. Множество значений квадратного трехчлена с логарифмической функцией. Множество значений логарифмической функции с квадратным трехчленом в показателе. Множество значений логарифмической функции с независимой переменной в основании.

Тема 15. Показательные и логарифмические уравнения

Элементарные показательные уравнения. Показательные уравнения, приводящиеся к квадратным. Показательные уравнения, разлагающиеся на множители. Однородные показательные уравнения. Замена переменных в показательных уравнениях. Элементарные логарифмические уравнения. Логарифмические уравнения, приводящиеся к квадратным. Логарифмические уравнения, разлагающиеся на множители. Однородные логарифмические уравнения. Замена переменных в логарифмических уравнениях. Показательно-логарифмические уравнения.

Тема 16. Показательные и логарифмические неравенства

Элементарные показательные неравенства. Показательные неравенства, приводящиеся к квадратным. Показательные неравенства, разлагающиеся на множители. Однородные показательные неравенства. Замена переменных в показательных неравенствах. Элементарные логарифмические неравенства. Логарифмические неравенства, приводящиеся к квадратным. Логарифмические неравенства, разлагающиеся на множители. Равносильные преобразования логарифмических неравенств. Проблемы, связанные с изменением ОДЗ при выполнении логарифмических преобразований. Показательно-логарифмические неравенства.

Тема 17. Задачи с параметром

Линейные уравнения с параметром. Линейные неравенства с параметром. Линейные системы с параметром. Квадратные уравнения, системы и неравенства с параметром. Условия, при которых заданный промежуток расположен между корнями (вне корней) квадратного уравнения. Условия, при которых все числа заданного промежутка являются решениями квадратного неравенства. Системы квадратных неравенств с параметром. Уравнения с параметром в правой части. Связь со множеством значений. Уравнения и неравенства с ограничениями, зависящими от параметра. Иррациональные уравнения и неравенства с параметрами. Квадратные уравнения относительно параметра. Алгебраические уравнения старших степеней, которые можно рассматривать как квадратные уравнения относительно параметра. Тригонометрические уравнения относительно

Математика

параметра. Показательные уравнения относительно параметра. Логарифмические уравнения относительно параметра. Иррациональные уравнения относительно параметра. Решение уравнений и неравенств на плоскости (параметр, переменная).

Тема 18. Графические методы решения уравнений и систем с параметром

Пересечение прямой и параболы. Взаимное расположение ломаной и параболы. Взаимное расположение двух парабол. Композиция тригонометрической функции и обратной тригонометрической функции. Композиция обратной тригонометрической функции и тригонометрической функции. Графическое решение уравнений и систем уравнений, включающих уравнения окружностей, прямых, квадратов и других простейших фигур. Пересечение прямой и окружности. Взаимное расположение ломаной линии и окружности. Взаимное расположение окружности и параболы. Уравнение окружности с модулями.

Тема 19. Вычисление и применение производной

Определение и геометрический смысл производной. Таблица производных. Правила вычисления производных. Вычисление производной сложной функции. Понятие о функциях, не имеющих производной в точке. Уравнение касательной к графику дифференцируемой функции. Свойства касательной к параболе. Свойства касательной к кубической параболе. Свойства касательной к гиперболе. Понятие касания графиков двух функций.

Тема 20. Применение производной для решения задач

Нахождение участков монотонности. Исследование локальных экстремумов функции. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции. Экстремальное значение суммы величин с заданным произведением. Экстремальное значение произведения величин с заданной суммой. Геометрическая интерпретация экстремальных задач. Экстремальное значение квадратичной функции двух переменных. Экстремальные задачи экономического содержания. Геометрические экстремальные задачи. Исследование количества корней уравнения с параметром. Вычисление максимальной выручки при заданном объеме вложенных средств. Вычисление наименьшего объема вложенных средств для достижения заданной величины выручки. Задачи оптимизации экономической деятельности, приводящиеся к исследованию свойств квадратного трехчлена. Задачи оптимизации экономической деятельности, приводящиеся к исследованию свойств степенных функций.

Тема 21. Планиметрические задачи, многоугольники, окружности

Теорема синусов. Теорема косинусов. Подобие треугольников. Измерение углов и дуг, связанных с окружностью. Вписанные и центральные углы. Свойство пересекающихся хорд в окружности. Свойство касательной и секущей. Метрические соотношения в круге. Параллелограмм, ромб, прямоугольник, квадрат. Трапеция. Метрические соотношения в четырехугольниках общего вида. Свойства четырехугольника, в который вписана окружность. Свойства четырехугольника, вокруг которого можно описать окружность.

Тема 22. Обратная функция, сложная функция, функциональные уравнения

Понятие сложной функции. Вычисление области определения сложной функции. Вычисление множества значений сложной функции. Вычисление производной сложной функции. Вычисление наибольшего и наименьшего значений сложной функции. Понятие обратной функции. Общие правила построения обратной функции. Основные пары взаимно обратных функций: линейная, степенная, тригонометрические, показательная и логарифмическая. Множество значений

Математика

композиции нескольких квадратных трехчленов. Композиция квадратного трехчлена и тригонометрической функции. Композиция квадратного трехчлена и логарифмической функции. Композиция квадратного трехчлена и показательной функции.

Тема 23. Последовательности и прогрессии

Понятие и свойства арифметической прогрессии. Вычисление суммы отрезка натурального ряда. Вычисление суммы отрезка арифметической прогрессии. Вычисление суммы множества натуральных чисел, определяемых свойствами делимости. Понятие и свойства геометрической прогрессии. Вычисление суммы отрезка геометрической прогрессии. Задачи на составление уравнений, связанных со свойствами геометрической прогрессии. Задачи, в которых присутствуют одновременно арифметическая и геометрическая прогрессии. Понятие бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Уравнения и неравенства, в которых присутствует сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Тема 24. Стереометрические задачи

Аксиомы стереометрии. Параллельность и перпендикулярность прямых в пространстве. Векторы в пространстве. Многогранники. Площадь поверхности и объем многогранника. Правильные многогранники. Сфера. Площадь поверхности и объем сферы. Тела вращения.

Тема 25. Теория вероятностей и комбинаторика

Случайные события. Среднее значение, медиана, отклонения, дисперсия. Математическое описание случайных явлений. Элементарные события и их вероятность. Правило вычисления вероятности. Основы теории множеств: объединение, пересечение множеств, диаграммы Эйлера. Применение теории множеств для вычисления вероятности. Вероятность противоположного события. Объединение и пересечение событий. Формула сложения вероятностей для произвольного количества событий. Правило умножения вероятностей для независимых событий. Понятие случайной величины, её математического ожидания и дисперсии. Испытания Бернулли. Биномиальное распределение и его математическое ожидание. Геометрическая вероятность. Задачи о выборе точки или нескольких точек внутри отрезка или квадрата. Применение геометрической модели для вычисления вероятности. Правило умножения и правило сложения в комбинаторике. Основные задачи комбинаторики: подсчёт числа перестановок и сочетаний. Рекуррентные соотношения. Составление рекуррентных соотношений в комбинаторных задачах. Решение линейных рекуррентных соотношений второго порядка. Основы теории множеств в комбинаторике. Формула включений-исключений. Подсчёт числа элементов в множестве путём разбиения его на подмножества. Понятие отображения множеств и взаимно-однозначного соответствия между двумя множествами. Решение комбинаторных задач с помощью установления взаимно-однозначных соответствий.

Рекомендуемая литература

Основная литература

1. Богомолова О.Б. Логические задачи – М.: БИНОМ. Лаборатория базовых знаний, 2009.
2. Болотов А.А., Прохоренко В.И., Сафонов В.Ф. Математика. Теория и задачи. – М.: Издательство МЭИ, 1998.
3. Всероссийская олимпиада школьников по математике 1993–2006; Окружной и финальный этапы / Под ред. Н.Х. Агаханова – М.: МЦНМО, 2007.
4. Голубев В.И. Решение сложных и нестандартных задач по математике. М.: ИЛЕКСА, 2007.
5. Дориченко С.А., Яценко И.В. Московская математическая олимпиада: сборник подготовительных задач. – М., 1994.
6. Козко А.И., Чирский В.Г. Задачи с параметром и другие сложные задачи. М.: МЦНМО, 2007.
7. Лурье М.В., Александров Б.И. Задачи на составление уравнений – М.: Наука, 1990.
8. Олехник С.Н., Потапов М.К., Пасиченко П.И. Уравнения и неравенства. Нестандартные методы решения: справочник. – М.: Факториал, 1997.
9. Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике (2005–2008). – М.: Изд. ЦПИ мех–мат МГУ, 2008.
10. Петрушко И.М., Прохоренко В.И., Сафонов В.Ф. Задачник по математике (с тестами и банком задач для межрегиональных олимпиад). – М.: Издательский дом МЭИ, 2009.
11. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии – М.: Наука, 1986.
12. Сергеев И.Н., Олехник С.Н., Гашков С.Б. Примени математику – М.: Наука, 1989.
13. Фарков А.В. Готовимся к олимпиадам по математике. – М.: Экзамен, 2010.
14. Штейнгауз Г. Сто задач – М.: Наука, 1976.
15. Яценко И.В. Приглашение на математический праздник. – М.: МЦНМО, 2005.