ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101679418511

# Титульный лист

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Направление** | ☐ | информатика | ☐ | история | ☒ | математика |
| | ☐ | обществознание | ☐ | политология | ☐ | русский язык |
| | ☐ | социология | ☐ | физика | ☐ | химия |

**Класс** ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

**Фамилия** ЛИЯСОВ

**Имя** СЕРГЕЙ

**Отчество** АНДРЕЕВИЧ

**Дата рождения** 29 11 2002

**Город участия** ЕКАТЕРИНБУРГ

**Аудитория** 513

**Телефон** 89995102911

**Дата** 29 02 2020 **Подпись**

**Пример заполнения** А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101679418511

# Проверочный лист

## Заполняется участниками

**Направление** ☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ политология ☐ русский язык ☐ социология ☐ физика ☐ химия

**Класс** ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

## Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Замена ручки ☐ да

Время выхода с : до :

Примечание

## Протокол проверки

## Заполняется жюри

| Номер задания | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Балл члена жюри №1 | 0 | 0 | 15 | 15 | 0 | 0 | | | | |
| Балл члена жюри №2 | 0 | 0 | 15 | 15 | 0 | 0 | | | | |

| Номер задания | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Балл члена жюри №1 | | | | | | | | | | |
| Балл члена жюри №2 | | | | | | | | | | |

**Итоговый балл** 30

**Подпись члена жюри №1**

**Подпись члена жюри №2**

**Пример заполнения** А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

№3) для $a$ такого, что $\begin{cases} a>1 \\ a\in\mathbb{N}\end{cases}$ : $a! = a(a-1)\ldots 2\cdot 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow a! \vdots 2$; для $a=1$: $a! = 1 \not\vdots 2 \Rightarrow 1$ — ед. натур. число, фактор. которого не кратен двум

$2019 \not\vdots 2 \Rightarrow$ в любом разложении 2019 на сумму факт. натур. чисел обяз. присутствует хотя бы один $1!$, т.е. любое такое разлож. 2019 имеет вид: $2019 = a_1!+a_2!+\ldots+a_n!+1!$ (где $\{a_1,a_2\ldots a_n\}\subset\mathbb{N}$ и $n\in\mathbb{N}$) - при переносе $1!$ через знак равенства: $2018 = 2019-1! = a_1!+a_2!+\ldots+a_n! \Rightarrow$ любому разложению $2019=a_1!+a_2!+\ldots+a_n!+1!$ можно поставить во взаимно-однозначн. соответствие разложение $2018 = a_1!+a_2!+\ldots+a_n! \Rightarrow$ к-ва их разложений равны: $A=B$, чтд +

№4) $p+p^2+\ldots+p^q = q+q^2+\ldots+q^p \mid +1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1+p+\ldots+p^q = 1+q+\ldots+q^p$; т.к. $p$ и $q$ - прост, то $p\neq1\neq q \Rightarrow$

по форм. суммы членов геом прогр: $\frac{p^{q+1}-1}{p-1} = \frac{q^{p+1}-1}{q-1} \Rightarrow (p^{q+1}-1)(q-1) = (q^{p+1}-1)(p-1) \Rightarrow$

$\Rightarrow p^{q+1}q - p^{q+1} - q = q^{p+1}p - q^{p+1} - p \Rightarrow pq(p^q-q^p) = p^{q+1} - q^{p+1} + q - p \Rightarrow$

$\Rightarrow p^{q+1}-p = q\cdot(p\cdot(p^q-q^p)+q^p-1) \vdots q \Rightarrow$

$\Rightarrow p^{q+1}-p = p\cdot(p^q-1) \vdots q$; аналог. $q(q^p-1)\vdots p$

предп., что $p\neq q \Rightarrow$ т.к. $p$ и $q$ - простые, то $p\not\vdots q$ и $q\not\vdots p \Rightarrow$ по малой Th Ферма: $p^{q-1}\equiv 1 \pmod q \Rightarrow$

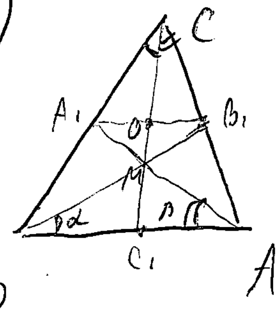
$\Rightarrow p^q \equiv p \pmod q \Rightarrow p(p^q-1) \equiv p(p-1) \pmod q \Rightarrow p(p-1)\vdots q \Rightarrow$

$\Rightarrow p-1\vdots q$, аналог. $q-1\vdots p \Rightarrow p-1 = kq$, $q-1 = tp$ ($\{k;t\}\in\mathbb{Z}$)

$\Rightarrow p = kq+1$, $q = tp+1 \Rightarrow p = tkp+k+1$, $q = tkq+t+1 \Rightarrow$ поскольку $p$ и $q$ - простые, то $p\neq1\neq q \Rightarrow$
$t\neq0\neq k$; $q = \frac{t+1}{1-tk}$; $p = \frac{k+1}{1-tk} \Rightarrow \frac{p}{q} = \frac{k+1}{t+1} \Rightarrow p = q\frac{k+1}{t+1}$; $q$-простое $\Rightarrow q\not\vdots t+1$, $(t\neq0)$

$p\in\mathbb{Z}$ ~~[зачёркнуто]~~ $\Rightarrow \frac{q(k+1)}{p+1}\in\mathbb{Z} \Rightarrow k+1 \vdots p+1 \Rightarrow \frac{k+1}{p+1}\in\mathbb{Z} \Rightarrow p$ может быть выражено как произведение $q$ и целого числа $\Rightarrow p \vdots q$, чего не может быть, т.к. $p$ и $q$ - простые $\Rightarrow$ противореч $\Rightarrow$ предположение неверно $\Rightarrow p=q$, чтд +

№6)




$\angle A_1MB_1 = \angle AMB$ (как вертик); $\angle A_1MB_1 = 180^\circ - \alpha - \beta$ (пусть $\angle BCC_1=\alpha$; $\angle ACC_1=\beta$) $\Rightarrow \angle A_1CB_1 + \angle A_1MB_1 = 180^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow A_1CB_1M$ можно впис в окр, для которой:

$AB_1\cdot AC = AM\cdot AA_1$; $BM\cdot BB_1 = BA_1\cdot BC$;

$CO\cdot MO = A_1O\cdot B_1O$; т.к. $\triangle A_1CB_1 \sim \triangle ABC$ ($A_1B_1$ - ср. линия $\Rightarrow$ 2 угла равны) $\Rightarrow A_1O = \frac12 BC_1 = \frac14 AB$;

$B_1O = \frac14 AB$; $CO=\frac12 C_1C$; $MO = C_1C - CO - C_1M = C_1C(\frac12-\frac13) = \frac16 C_1C$

$CC_1$, $BB_1$ и $AA_1$ - мед $\Rightarrow BM = \frac23 BB_1$, ~~[зачёркнуто]~~ $\Rightarrow$

$\Rightarrow BM\cdot B_1B = \frac23 BB_1^2$; $BA_1 = \frac12 BC \Rightarrow BA_1\cdot BC = \frac12 BC^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~[зачёркнуто]~~ $\frac23 BB_1^2 = \frac12 BC^2 \Rightarrow BB_1 = \frac{\sqrt3}{2}BC$, аналог $AA_1 = \frac{\sqrt3}{2}AC$;

$16\cdot CO\cdot MO = 16\cdot A_1O\cdot B_1O \Rightarrow \frac{16}{12}CC_1^2 = \frac{16}{16}AB^2 \Rightarrow CC_1 = \frac{\sqrt3}{2}AB$

по Т и косинусов: $A_1M^2 = CA_1^2 + CM^2 - 2CA_1\cdot CM\cdot\cos\alpha$;

$BM^2 = BC^2+CM^2 - 2BC\cdot CM\cos\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac49 BB_1^2 = BC^2 + \frac49 CC_1^2 - 2\cdot\frac23 BC\cdot CC_1\cos\alpha$;

$\frac19 AC^2 = \frac14 BC^2 + \frac49 CC_1^2 - 2\cdot\frac13 BC\cdot CC_1\cos\alpha$ $|\cdot 2$

~~$\frac49(BB_1^2 - AC^2) = \frac43 CC_1^2 + \frac43 BC\cdot CC_1\cos\alpha$~~

$\frac49 BB_1^2 - \frac29 AC^2 = \frac12 BC^2$

## Бланк ответов

## Бланк ответов