ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101419438305

Титульный лист

Направление ☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ политология ☐ русский язык ☐ социология ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Фамилия САВУШКИН

Имя ВСЕВОЛОД

Отчество ЛЕОНИДОВИЧ

Дата рождения 19 01 2002

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Аудитория 632

Телефон 89826682529

Дата 29 02 2020 **Подпись** Сав

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101419438305

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ политология ☐ русский язык ☐ социология ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Заполняется организаторами

Количество доп. листов Замена ручки ☐ да

Время выхода с : до :

Примечание

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	15	0	15	0	5	0				
Балл члена жюри №2	15	0	15	0	5	0				

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Балл члена жюри №1										
Балл члена жюри №2										

Итоговый балл 35

Подпись члена жюри №1 [подпись]

Подпись члена жюри №2 [подпись]

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

Задание 1.

Дано:
$a < b < c < d$
$c^2 = ab + ad + bd$.

Найти: a – ? b – ? c – ? d.

Решение: методом подбора находим следующие значения: $a = 1$, $b = 9$, $c = 13$, $d = 16$

$13^2 = 1\cdot 9 + 1\cdot 16 + 9\cdot 16$
$169 = 9 + 16 + 144$
$169 = 169$
Верно.

Ответ: $a = 1$
$b = 9$
$c = 13$
$d = 16$.

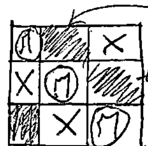
+

Задание 5.

П	×	×	П	×	×	П	×	×	П	×	×
×	П	×	×	П	×	×	П	×	×	П	×
×	×	П	×	×	П	×	×	П	×	×	П
П	×	×	П	×	×	П	×	×	П	×	×
×	П	×	×	П	×	×	П	×	×	П	×
×	×	П	×	×	П	×	×	П	×	×	П
П	×	×	П	×	×	П	×	×	П	×	×
×	П	×	×	П	×	×	П	×	×	П	×
×	×	П	×	×	П	×	×	П	×	×	П
П	×	×	П	×	×	П	×	×	П	×	×
×	П	×	×	П	×	×	П	×	×	П	×
×	×	П	×	×	П	×	×	П	×	×	П

Принцесса

Данная сказочная шахматная фигура будет бить следующие клетки вокруг себя:



Принцесса бьёт данные клетки.

Наиболее оптимальным вариантом (не доказано) размещения фигур будет вариант представленный выше.

Мы можем поместить максимум 3 принцессы в 9 клеток

Так как мы имеем поле $12 \times 12 = 144$ кл, то:

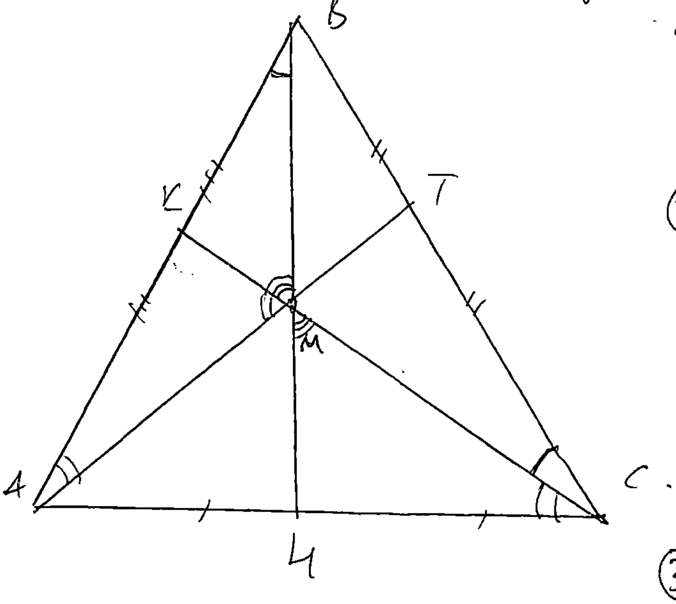
$\frac{144}{9} \cdot 3 = 48$ – максимальное количество принцесс не бьющих друг друга.

Ответ: 48 штук

1

пример есть

Задание 6



Решение: ① ~~Из~~ $\angle KMB = \angle HMC$ (как вертикальные углы при пересекающихся прямых KC и HB.

② По теореме о точке пересечения медиан треугольника:
$\frac{BM}{MH} = \frac{2}{1}$ и $\frac{MC}{MK} = \frac{2}{1}$

Отсюда следует, что: $\frac{BM}{MH} = \frac{MC}{MK}$

$\frac{BM}{MC} = \frac{MH}{MK}$

③ Из ① и ② следует, что:
$\begin{cases} \angle KMB = \angle HMC \\ \frac{BM}{MC} = \frac{MH}{MK} \end{cases}$, Это не признак подобия по 2 признаку подобия (по двум пропорциональным сторонам и углу между ними) => $\triangle KMB \sim \triangle HMC$

④ Из ③ => $\angle KBM = \angle MCH$, как соответствующие углы в подобных треугольниках.

⑤ Из условия и из ④:
$\begin{cases} \angle KBM = \angle MCH \\ \angle BAM = \angle MCH \end{cases}$; по св-ву транзитивности: $\angle KBM = \angle \overset{B}{K}AM$ => по признаку равнобедренного треугольника: $\triangle ABM$ – равнобедренный.

⑥ По св-ву равнобедренного тр-ка, из $\triangle ABM$: KM – медиана, ~~т.к~~ (по условию), а значит KM – так же биссектриса и высота.

⑦ Т.к по доказанному: KM – высота, и по условию KC – ~~бис-~~ ~~медиана~~ ~~биссектриса~~, ~~то~~ и $\angle ACK = \angle KCB$ (т.к $\angle KCB = \angle ABM$ и $\angle ACK = \angle ABM$) – биссектриса, то получаем, что $\triangle ACB$ – равнобедренный (по признаку) $AC = BC$

⑧ Т.к KM – биссектриса, то $\angle KMB = \angle KMA$
$\left.\begin{matrix} \angle KMB = \angle KMA \\ \angle KMB = \angle HMC \text{ (как вертик.)} \end{matrix}\right\} \angle KMA = \angle HMC$

$\angle KAM = \angle MCH$ (по условию), получаем, что $\triangle KAM$ ~~~~ подобен $\triangle MHC$ (по двум равным углам), то соответственно: $\angle MHC = \angle AKM = 90^0$ (т.к KM – высота) (как соответств. углы в подобных тр-ках), $\angle MHC = 90^0$, значит BH – высота (по определению), BH – медиана и высота, значит $\triangle ABC$ – равнобедренный (по признаку) ($AB = BC$).

⑨ Из ⑦ и ⑧ получаем:
$\left.\begin{matrix} AC = BC \\ AB = BC \end{matrix}\right\} AB = BC = AC \Rightarrow \triangle ABC$ – равносторонний (по определению) ч.т.д.

Ответ: Да, верно.

Бланк ответов

Задание 4.

Дано: $p+p^2+\ldots+p^q=q+q^2+\ldots q^p$

Доказать: $p=q$.

Док-во: 1) $\underbrace{p+p^2+\ldots+p^q}_{} = b_1\frac{p(p^q-1)}{p-1}$

сумма ~~x~~ q членов геометрической прогрессии:

b_1 – первый член $= p$.

p – частное

q – количество членов.

2) Аналогично для: $q+q^2+\ldots+q^p = \frac{q(q^p-1)}{q-1}$.

$$\frac{p(p^q-1)}{p-1}=\frac{q(q^p-1)}{q-1}$$

$$\frac{q-1}{p-1}=\frac{q(q^p-1)}{p(\cancel{q}p^q-1)}$$

Так как p и q – простые числа, то q не кратно p и q^p-1 не кратно p^q-1, значит данное равенство будет верно только при $p=q$

Почему?

Задание 3

A – количество способов представить 2018 как сумму факториалов

B – количество способов представить 2019 как сумму факториалов.

В A и B использованы одинаковые представления факториалов, за исключением двух случаев.

~~2018 – четное число, соответственно оно должно быть представлено суммой равного кол-ва числа факториалов четных и нечетных чисел, и оно не может включать 1!~~

~~201~~ 9

1) 2019 – нечетное число, и т.к оно больше 2018 на 1, то, соответственно оно включает 1! ~~но~~ – в любую из всевозможных сумм,

2) Все факториалы кроме 1! представляют собой четные числа

поэтому для числа 2019 характерны все те же подборы суммы факториалов, что и для числа 2018, но с прибавлением 1!.
Т.к. получить нечётное число можно только суммой чётного и нечётного, значит $A=B$. ч.т.д.

Задание 2

Дано: $f(x)$ и $g(x)$ - квадратичные функции. Найти: $x_{пер}$.

Решение: $f(x)=a_1x^2+b_1x+c_1$.

$g(x)=a_2x^2+b_2x+c_2$

$f(x)=g(x)$ $a_1x^2+b_1x+c_1=a_2x^2+b_2x+c_2$.

$(a_1-a_2)x^2+(b_1-b_2)x+(c_1-c_2)=0$.

Данное ур-ние имеет по условию 2 корня: x_3 и x_4.

$$x_3=\frac{(b_2-b_1)-\sqrt{(b_1-b_2)^2-4(a_1-a_2)(c_1-c_2)}}{2(a_1-a_2)}.$$

$$x_4=\frac{(b_2-b_1)+\sqrt{(b_1-b_2)^2-4(a_1-a_2)(c_1-c_2)}}{2(a_1-a_2)}.$$

$f(x_2)=a_1x_2^2+b_1x_2+c_1$

$\cancel{g}f(x_1)=a_2x_1^2+b_2x_2+c$;

$y=kx+b$ $M(x_2; f(x_2))$. $N(x_1; \cancel{f}g(x_1))$

$$\begin{cases} f(x_2)=kx_2+b \\ g(x_1)=k\cancel{x}x_1+b \end{cases}$$

$k=\frac{f(x_2)-b}{\cancel{k}x_2}$.

$b=g(x_1)-\frac{f(x_2)-b}{x_2}\cdot x_2$.

$bx_2+f(x_2)x_2=bx_2$

Т.к прямая MN пересекает ось Ox, то

$f(x_{пер})=0$

$0=\frac{f(x_2}{}$

Бланк ответов