ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101585255092

Титульный лист

Направление	☐ информатика	☐ история	☒ математика
	☐ обществознание	☐ политология	☐ русский язык
	☐ социология	☐ физика	☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Фамилия ШПАК

Имя ДАРЬЯ

Отчество АЛЕКСАНДРОВНА

Дата рождения 08 04 2002

Город участия МОСКВА

Аудитория 105

Телефон +79063918119

Дата 29 02 2020 **Подпись** [подпись]

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101585255092

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление

- [ ] информатика
- [ ] история
- [x] математика
- [ ] обществознание
- [ ] политология
- [ ] русский язык
- [ ] социология
- [ ] физика
- [ ] химия

Класс

- [ ] 8
- [ ] 9
- [ ] 10
- [x] 11

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Замена ручки [ ] да

Время выхода с : до :

Примечание

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	15	0	15	0	0	0				
Балл члена жюри №2	15	0	15	0	0	0				

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Балл члена жюри №1										
Балл члена жюри №2										

Итоговый балл 30

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

① $a<b<c<d$ $(a,b,c,d \in N)$ $c^2 = ab + ad + bd$

Для того, чтобы сумма произведений чисел равнялась полному квадрату, необходимо, чтобы каждое из слагаемых было квадратом некоторого числа, но по условию $a \neq b$ и т.д. т.е. $ab \neq a^2 + b^2$ и т.д. $\Rightarrow$ a, b, d – квадраты наименьших натуральных чисел. т.е. $a = 1^2 = 1$, $b = 2^2 = 4$, $d = 3^2 = 9$. Проверим, является ли сумма произведений для таких a, b, d полным квадратом:

$m = ab + ad + bd = 1\cdot 4 + 1\cdot 9 + 4\cdot 9 = 4 + 9 + 36 = 40 + 9 = 49 \Rightarrow m = 49$, $\sqrt{m} = 7 \in N$

т.е. равенство выполняется, при этом $a<b<c<d$

Ответ: $a = 1$, $b = 4$, $c = 7$, $d = 9$.

+

③ A – кол-во способов представления 2018 в виде: $2018 = x! + x_1! + \ldots$

B – кол-во способов представления 2019 в виде: $2019 = y! + y_1! + \ldots$

т.к. 2019 – нечётное, то в своём „разложении" оно должно иметь нечётное кол-во нечётных слагаемых.

$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$ т.е. любой факториал при $n \geq 2$ – чётный и только $1! = 1$ – нечётный, значит мы можем представить число 2019 как $2018 + 1!$ (т.к. $2019 = 2018 + 1$). Число $2018 + 1!$ имеет столько же „разложений", сколько и число 2018 (т.к. $1!$ на сумму факториалов не раскладывается) т.е. всего A способов $\Rightarrow$ A – кол-во сп-бов $2018 = x! + x_1! + \ldots$, B – кол-во способов $2019 = 2018 + 1! = 1! + y! + y_1! + \ldots$ $\Rightarrow$ $A = B$. чтд.

+

④ числа p и q – простые $p + p^2 + \ldots + p^q = q + q^2 + \ldots + q^p$ (1)

Д-ть: $p = q$ Д-во: в (1) равенстве перенесём все слагаемые в левую часть: $p - q + p^2 - q^2 + \ldots + p^q - q^p = 0$ (2). Предположим, что $p \neq q$ (для определённости $p > q$) $(p-q) + (p-q)(p+q) + (p-q)(p^2 + qp + q^2) +$
$+ (p-q)((q+p)(q^2+p^2)) + \ldots + p^q - q^p = (p-q)(1 + (p+q) + p^2 + qp + q^2 + (q+p)(q^2+p^2) + \ldots) +$

неверно

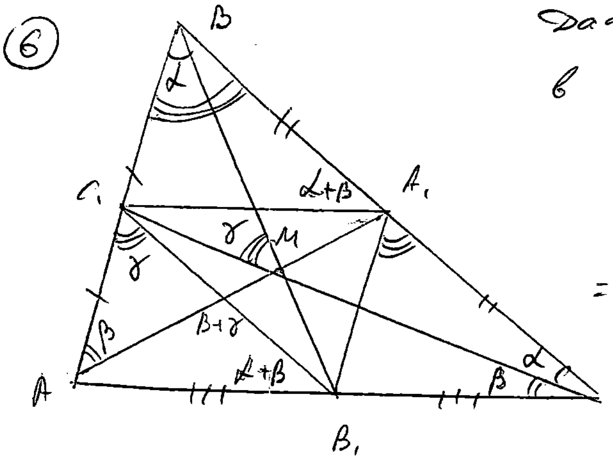
$+ \ldots + p^q - q^p$ из (2) это равно 0, но т.к. $p \neq q$, то $p - q \neq 0$ $(p-q>0)$ т.к.

~~$p^q - q$~~ $p > q$, то $p^q - q^p > 0$, значит $1 + q + p + p^2 + qp + q^2 + (q+p)(q^2+p^2) + \ldots < 0$

$1>0$; p, q – простые числа $\Rightarrow q, p > 0$, q^2 и $p^2 > 0$ т.к. p и q – ~~неотрицательные~~ положительные, $q \cdot p > 0$, $q+p>0$, $q^2+p^2>0$ и т.д. т.е. вся сумма состоит из положительных слагаемых $\Rightarrow$ она положительна, но нам необходимо, чтобы она была отрицательна, потому что только при этом будут выполнены условия (т.к. $p-q>0$, $p^q - q^p > 0$, $p^{q-1} - q^{p-1} > 0$ ...). Получили противоречие. Значит, наше предположение неверно и $q = p$. В этом случае: $p-q=0$ и весь первый множитель равен 0, $p^q - q^p = p^p - p^p = 0$, $p^{q-1} - q^{p-1} = p^{p-1} - p^{p-1} = 0$ и т.д.

$q = p$ – чтд.

(6)



Дано: $\triangle ABC$, AA_1, BB_1, CC_1 – медианы, пересек. в т. M, $\angle ABM = \angle BCM$, $\angle BAM = \angle ACM$

Найти: $\triangle ABC$ – равностор. – ?

Решение: пусть $\angle ABM = \angle BCM = \alpha$, $\angle BAM = \angle ACM = \beta$; т.к. AA_1, BB_1 и CC_1 – медианы, то A_1, B_1 и C_1 – середины сторон $\triangle ABC \Rightarrow A_1B_1$, A_1C_1 и B_1C_1 – ср. линии $\triangle ABC$

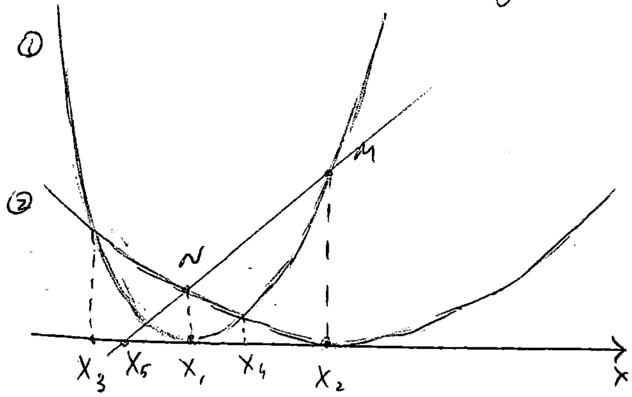
$A_1C_1 \parallel AC \Rightarrow \angle C_1A_1B = \angle ACB = \alpha+\beta$; $B_1C_1 \parallel BC \Rightarrow \angle AB_1C_1 = \angle ACB = \alpha + \beta$ (т.к. они соотв. при паралл. прямых); $\triangle C_1MB$ и $\triangle C_1CB$ имеют общий угол $\angle BC_1M$ и $\angle C_1BM = \angle C_1CB = \alpha \Rightarrow$ $\triangle$-ки подобны по 2-м углам и $\angle C_1MB = \angle C_1BC = \gamma \Rightarrow \angle AC_1B_1 = \angle ABC = \gamma$ (как соотв. углы при $B_1C_1 \parallel BC$), тогда в $\triangle AB_1C_1$ и $\triangle BC_1A_1$ $\angle C_1A_1B = \alpha+\beta = \angle C_1B_1A$, $\angle C_1BA_1 = \angle AC_1B_1 = \gamma \Rightarrow$ $\triangle$-ки подобны, но $AC_1 = C_1B$ т.к. C_1 – сер. $AB \Rightarrow \triangle C_1BA_1 = \triangle C_1AB_1$; аналогично $\gamma = \angle B_1A_1C_1 = \angle C_1BA_1$ ($A_1B_1 \parallel AB$) и $\triangle A_1B_1C = \triangle BC_1A_1$

тогда $A_1C_1 = AB_1 = B_1C$ и $A_1C_1 = \frac{AC}{2}$, $B_1C_1 = \frac{BC}{2}$, $A_1B_1 = \frac{AB}{2}$ и $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$ по 3-м стор. Около любого $\triangle$-ка можно описать окр-ть $\Rightarrow$ опишем окр-ть ω_1 около $\triangle A_1B_1C_1 \Rightarrow$ A_1, C_1, B_1 – точки касания BC, AB и AC с ω_1 $\Rightarrow BC$, AB и AC – касательные. По св-ву касательных, выходящих из одной точки: $B_1C = CA_1$, $A_1B = BC_1$, и $C_1A = AB_1 \Rightarrow AB = BC = AC$ и $\triangle ABC$ – равносторонний

неверно

Ответ: $\triangle ABC$ – равносторонний

② Т.к. 2-ни квадратичных ф-ций пересекаются в x_3, x_4, их вершины имеют абсциссы x_1, x_2 и лежат на оси абсцисс, то это возможно в двух случаях. На рисунке показан один из возможных случаев для $x \geq 0$: Пусть $MN \cap Ox = x_5$



пусть ур-ние 1 2-на имеет вид:

(1) $a_1x^2+b_1x+c_1=y_1$ $(a>0)$, а 2-го:

(2) $a_2x^2+b_2x+c_2=y_2$ $(a>0)$, тогда

$x_1 = x_{в_1} = \frac{-b_1}{2a_1}$ $\quad x_2 = x_{в_2} = -\frac{b_2}{2a_2}$

т.к. вершины лежат на Ox, то каждое из ур-ний имеет 1 решение:

$$\left.\begin{array}{l} a_1x^2+b_1x+c_1=0 \\ a_2x^2+b_2x+c_2=0 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} D=0: \quad b_1^2-4a_1c_1=0 \\ D=0: \quad b_2^2-4a_2c_2=0 \end{array} \Bigg| \Rightarrow \begin{array}{l} b_1^2=4a_1c_1 \\ b_2^2=4a_2c_2 \end{array}$$

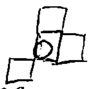
Чтобы найти x_3 и x_4 — т. пересеч. 2-ков приравняем (1) и (2) и получим: $a_1x^2+b_1x+c_1 = a_2x^2+b_2x+c_2$

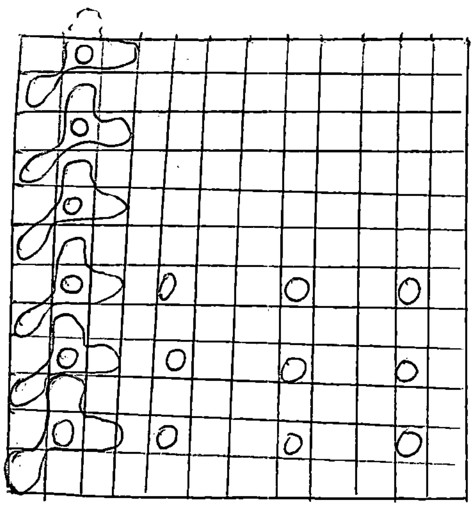
$x^2(a_1-a_2)+x(b_1-b_2)+c_1-c_2=0$ $\qquad x_{3,4} = \frac{-(b_1-b_2) \pm \sqrt{D}}{2(a_1-a_2)}$

$y=kx+b$ — ур-ние прямой

$y_1' = 2a_1x+b_1$ $\qquad y_2' = 2a_2x+b_2$ $\qquad y_{кас} = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

$y_{кас\ 1} = 2a_1x_2(x-x_2)+a_1x_2^2+b_1x_2+c_1$ $\qquad y_{кас\ 2} = 2a_2x_1(x-x_1)+a_2x_1^2+b_2x_1+c_2$

(5) Т.к. принцесса двигается только вверх, вправо или по диагонали влево вниз, то все варианты ходов одной принцессы можно представить в виде: , где О – принцесса.



Первую модель принцессы ставим в левый нижний угол и через одну клетку вверх ставим еще принцесс так, чтобы и модели не касались (всего принцесс получилось 6) т.к. в этом случае ни одна принцесса не будет бить другую. Если поставить вправо через одну клетку еще принцессу, то может случиться так, что одна из принцесс левого столбца будет идти вправо, а из правого – вверх, тогда они встретятся => ставим вправо через 2 клетки, но только 3 штуки т.к. в этом случае может случиться так, что 4-я принцесса будет идти по диагонали, а из правого столбца – вверх. Продолжаем далее и получаем 15 принцесс.

Ответ: 15. Можно больше

Бланк ответов