ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2502051033025

Титульный лист

Направление ☐ информатика ☐ история ■ математика ☐ обществознание ☐ политология ☐ русский язык ☐ социология ☐ физика ☐ химия ☐ филология

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ■ 11

Фамилия ГЕРАСИМОВ

Имя МИХАИЛ

Отчество СЕРГЕЕВИЧ

Дата рождения 09 03 2004

Город участия Нижний Тагил

Аудитория 124

Телефон 89220368225

Дата 26 02 2022 **Подпись**

Пример заполнения АБВГДЕЖЗИЙКЛМНОПРСТУФ ХЦЧШЩЪЫЬЭЮЯ1234567890

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2502051033025

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ информатика ☐ история ■ математика
☐ обществознание ☐ политология ☐ русский язык
☐ социология ☐ физика ☐ химия
☐ филология

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ■ 11

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Время выхода с : до :

Примечание

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3 0	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	17	~~8~~	0	0					
Балл члена жюри №2	20	17	0	0	0					

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Балл члена жюри №1										
Балл члена жюри №2										

Итоговый балл 37

Подпись члена жюри №1 **Подпись члена жюри №2**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Задача № 5

Предположим, что такое могло случиться

Рассмотрим 4 последовательных простых из множества:

$p_k ; p_{k+1} ; p_{k+2} ; p_{k+3}$

Если рассмотреть $i=k$; то заметим, что p_{k+2} меньше хотя бы одного
(что?)

из чисел p_k и p_{k+1}; иначе $p_{k+2} \geq p_k$; $p_{k+2} \geq p_{k+1}$ $p_{k+2}^2 \geq p_k \cdot p_{k+1}$;

тогда $\frac{p_k \cdot p_{k+1} - p_{k+2}^2}{p_k + p_{k+1}} \leq \frac{0}{p_k + p_{k+1}}$ – не натуральное; ~~тогда~~ Пусть $\max(p_k; p_{k+1}) = t$;

тогда $p_{k+2} < t$; тогда $\max(p_{k+1}; p_{k+2}) \leq t$; аналогично получим $p_{k+3} <$

$< \max(p_{k+1}; p_{k+2}) \leq t$ т.е. $p_{k+2} < t$; $p_{k+3} < t$; ; теперь $\max(p_{k+2}; p_{k+3}) < t = t_2$.

Аналогично продолжим, ~~не~~ $\max(p_i ; p_{i+1})$ – будет уменьшаться; причём уменьшается он на натуральное число; но при этом он натурален; значит в какой-то момент он должен перестать уменьшаться; ~~не тогда будет~~ ~~тройка простых $p_i ; p_{i+1} ; p_{i+2}$, где $p_i = p_{i+1} = p_{i+2}$~~ Но тогда по вышеизложенным рассуждениям $\frac{p_i \cdot p_{i+1} - p_{i+2}^2}{p_i + p_{i+1}} \leq 0$ i.e. не натуральное, значит — не может.

Ответ. Не может. P.S. множество простых чисел бесконечно по теореме Дирихле, или просто, как общеизвестный факт

Задача № 1 Так а что мешает строить последовательность с конца, а не с начала?

~~Найд~~ Выпишем первые 9 простых чисел: 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23

11 + 12 = 23; значит никакие суммы не могут дать простое число больше 23

Найдём те числа, в сумме с которыми 4 даёт простое число. $4+1 \geq 5$; $4+12 \leq 16$; от 5 до 16 4 простых числа; 5; 7; 11; 13 т.е. 4 в сумме с чем-то даст простое с не более чем 4-мя другими числами, а именно: 1; 3; 7; 9

№ 1 Продолжение

аналогично $10+1 \le 11$ $\quad 10+12 \le 22$ т.е. не более 4 чисел (11; 13; 17; 19)

с числами 1; 3; 7; 9.

Заметим, что каждое число участвует в 4 суммах

$a \;{}^4\; b$ -- какое-то число $\quad a; b; c; d$ - числа 1; 3; 7; 9 в каком-то порядке

$c \quad - \quad - \quad d$

При этом 10 должно стоять между a и c или b и d; но тогда она либо с „c", либо с „d" не образует сумму; а другого числа, чтобы в сумме получить простое нет; Значит 10 с кем-то даст не простое.

Ответ. не могло +

Задача № 3

$x^2 + 2\cdot]x[= 6$; заметим, что поскольку $]x[$ - полуцелое число, то $2\cdot]x[$ = целое; x^2 = целое - целое; т.е. x^2 - целое число; пусть $x = k+\varepsilon$; где $k \in \mathbb{Z}$; $\varepsilon \in (0;1)$ $\quad x^2 = k^2 + 2k\varepsilon + \varepsilon^2$; $k^2 \in \mathbb{Z}$, тогда и $2k\varepsilon + \varepsilon^2$ - должно быть целым; пусть $\varepsilon = \frac{p}{q}$; где $p \in \mathbb{Z}$; $q \in \mathbb{N}$; ε-не иррациональное (мы так предполагаем); тогда $\frac{2kp\cdot q + p^2}{q^2}$ - целое, но $(p;q)=1$; т.е. дробь не сократится $2k\cdot p\cdot q + p^2 \not\vdots\, q$; т.е. в таком случае x-целое;

$x^2+2x=6$ - не имеет решений в действительных числах +

Если ε-иррациональное; то x-иррациональное (Почему?) x^2 - целое; т.е. $|x|$ - корень квадратный из натурального числа

Давайте сделаем небольшой перебор

$x=\sqrt{2}$ $\quad x^2+2]x[= 2+2=4<6$ $\quad x=\sqrt{3}$ $\quad x^2+2]x[= 3+2\cdot 1{,}5 = 6$ - подходит; для всех больших x - не подойдёт Почему?

~~$x=-\sqrt{2}$ $x^2+2]x[=2-3=-1$ $x=-\sqrt{5}$ $x^2+2]x[=5-5=0$~~

~~$x=-\sqrt{3}$ $x^2+2]x[=3-4=-1$ $x=-\sqrt{6}$~~

№ 3 Продолжение.

$-1{,}5 < -\sqrt{2} < -1$	$x^2 + 2]x[= 2-3 = -1$
$-2 < -\sqrt{3} < -1{,}5$	$3-4=-1$
$-2{,}5 < -\sqrt{5} < -2$	$5-5=0$
$-3 < -\sqrt{6} < -2{,}5$	$6-6=0$
$-3 < -\sqrt{7} < -2{,}5$	$7-6=1$
$-3 < -\sqrt{8} < -2{,}5$	$8-6=2$
$-3{,}5 < -\sqrt{10} < -3$	$10-7=3$
$-3{,}5 < -\sqrt{11} < -3$	$11-7=4$
$-3{,}5 < -\sqrt{12} < -3$	$12-7=5$
$-4 < -\sqrt{13} < -3{,}5$	$13-8=5$
$-4 < -\sqrt{14} < -3{,}5$	$14-8=6$
$-4 < -\sqrt{15} < -3{,}5$	$15-8=7$ ↓ дальше возрастает т.к. увеличиваются промежутки корней между целыми числами

Ответ. $x=\sqrt{3}$; $x=\sqrt{14}$ Переборного подбор корней

P.S. для отрицательных $t - 2]\sqrt{t}[> t - 2\sqrt{t} - 2$ т.к. $2]\sqrt{t}[< 2\sqrt{t}+2$

$t - 2\sqrt{t} - 2 = 6$ $D = 4+32 = 36$ $\sqrt{t_1} = \frac{2+6}{2} = 4$ $\sqrt{t_2} = \frac{2-6}{2} = -2$

т.е. $t - 2]\sqrt{t}[> 6$ при $\sqrt{t} > 4$; $-\sqrt{t} < -4$; что и было сказано.

Задача №2

a	b	c
d	e	f
g	h	i

$e>a$; $e>b$; $e>d$ $4 \le e \le 6$; Также заметим, что a меньше
$e<f$; $e<h$; $e<i$
всех остальных; i - больше всех/остальных; значит $a=1$; $i=9$

1) Пусть $e=4$

1	b	c
d	4	f
g	h	9

Тогда в b и d стоят или 2 или 3, иначе нельзя; Заметим, что если мы в тех позициях поменяем 2 и 3 местами, то свойство расстановки сохранится т.к. они меньше всех последующих т.е. есть 2 варианта выбрать b и d; условно возьмём $b=2$; $d=3$

№ 2 Продолжение

1	2	c
3	4	f
g	h	9

$h > 1$; $h > 2$; $h > 4$; $h > 3$; $h > g$ т.е. $h > 5$; аналогично $f > 5$; т.е. 5 может быть либо в c, либо в g; оба подходят 2 варианта выбрать; ~~[illegible]~~

1	2	5
3	4	f
g	h	9

6 не может быть в h; иначе $g < 6$; а $g \geq 7$
т.е. $\left[\begin{array}{l} 6 = f \\ 6 = g \end{array}\right.$ 2 варианта

1)

1	2	5
3	4	6
g	h	9

g; h — определятся однозначно

2)

1	2	5
3	4	f
6	h	9

h; f можно менять 7 и 8 местами 2 варианта

При другом выборе 5 получается аналогичная ситуация

~~[illegible]~~ $2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 2 = 4 + 8 = 12$ способов с 4 посередине. +

Заметим, что если мы поменяем 4 на 6, то произойдёт то же самое; только мы будем ставить цифры не 2; 3 и т.д., а сначала 7 и 8 и т.д.

т.е. ещё 12 вариантов +

Если $e = 5$

$f \neq 4$ и $h \neq 4$ т.к. $h \geq 6$ и $f \geq 6$

1	b	c
d	5	f
g	h	9

Если ~~[illegible]~~ $d = 4$; то b и c определяются, как 2 и 3 однозначно для них просто нет другой возможности. Тогда если $f = 6$; gh — определяются однозначно; если $g = 6$ — то f и h — 2 варианта можем менять 7 и 8 местами т.е. $\underline{2 + 2 \cdot 2 = }\, 6$; если $6 = h$ или $\underline{6 = f}$

Тут выходит 3 варианта для $d=4$ и еще 3 для $b=4$

Почему?

уже посчитали

~~если [illegible] c=4~~ всё то же самое, поэтому ещё 6 вариантов +

Последнее $g = 6$; $c = 4$ или $c = 6$; $g = 4$; тогда d и b — 2; 3 можем менять между собой; аналогично h и f т.е. $4 \cdot 2 = 8$ вариантов. Итого $12 \cdot 2 + 6 \cdot 2 + 8 = 44$ Ответ. 44 способа

Тут то и обсчиталая

Бланк ответов