ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2502593052413

Титульный лист

Направление ☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ политология ☐ русский язык ☐ социология ☐ физика ☐ химия ☐ филология

Класс ☒ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☐ 11

Фамилия ДЬЯКОНОВ

Имя СЕРГЕЙ

Отчество АНДРЕЕВИЧ

Дата рождения 08 10 2007

Город участия ЧЕБОКСАРЫ

Аудитория 1

Телефон 79172965767

Дата 26 02 2022 **Подпись**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2502593052413

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление

- [ ] информатика
- [ ] история
- [x] математика
- [ ] обществознание
- [ ] политология
- [ ] русский язык
- [ ] социология
- [ ] физика
- [ ] химия
- [ ] филология

Класс [x] 8 [ ] 9 [ ] 10 [ ] 11

Заполняется организаторами

Количество доп. листов 1

Время выхода с : до :

Примечание

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	20	20	20	0					
Балл члена жюри №2	20	20	20	20	0					

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Балл члена жюри №1										
Балл члена жюри №2										

Итоговый балл 80

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

Задание 1.

Пусть x - количество ясных дней. Пусть y - количество пасмурных дней. Тогда заметим, что количество ночей будет $x+y-1$, потому что между $x+y$ днями $x+y-1$ ночь. Тогда заметим, что получается ~~перв~~ первая улитка прошла $40x+25y-30\cdot(x+y-1)$ см. Это число равно ~~двум~~ 200 см. Заметим, что вторая улитка прошла $30x+35y-30\cdot(x+y-1)$. Тоже равно 200 см. Значит $40x+25y-30\cdot(x+y-1)=30x+35y-30(x+y-1)$ $\to 40x+25y=30x+35y \to 10x=10y \to x=y$. Значит $40x+25y-30(x+y-1)=65x-30\cdot(2x-1)=65x-60x+30=5x+30$ при этом $5x+30=200 \to 5x=170 \to x=34$. То есть $x+y=2x=2\cdot 34=68$ дней. То есть ответ однозначен: 68 дней. Приведу пример. Пусть ~~первые 17 дней будут ясными (в каждый день и ночь) то есть первая улитка~~ сутки - это день + ночь. Ясные сутки - значит в нем ясный день, а иначе пасмурные сутки. Пусть первые 17 суток были ясные, тогда первая поднялась на $17\cdot(40-30)=$ $=170$ см (отмечу, что это меньше 200 см). А вторая на $17\cdot(30-30)=0$ см. Пусть следующие 17 суток будут пасмурные. Тогда первая будет на отметке $170+17\cdot(25-30)=$ $=170-85=85$ см. А вторая на отметке $0+17\cdot(35-30)=$

Продолжение задача 1.

$= 85$ см. ~~Наверху за следующие 33 суток~~ Потом 17 пасмурных суток. Первый на отметке: $85+17\cdot(25-30) = 0$ см. Второй на $85+17\cdot(35-30) =$
$= 170$ см. Потом 16 ясных суток. Первый на $0+16\cdot(40-30) = 160$ см. Второй на $170+16\cdot(30-30) = 170$ см. И последний день будет ясным. Тогда первый на $160+40 = 200$ см $= 2$ м. Второй на $170+30 = 200$ см $= 2$ м. Я привел пример в котором они только под конец залезли на столб (до этого не залезали)

Ответ: 68 дней.

+

Задача 2.

Давайте посмотрим на последние две цифры числа n. Если n - однозначное, то заметим, что $5^2 = 25$ (2 - четная), $7^2 = 49$ (4 - четная цифра), $9^2 = 81$ (8 - четная цифра). Сразу же скажем, что n - нечетное число (если $n \vdots 2$, то $n^2 \vdots 2$, значит последняя цифра будет четной). Значит $n \geq 10$. Тогда пусть последние две цифры будут $\overline{xy}$. Тогда я хочу доказать, что в числе n^2 точно ~~первая~~ вторая цифра будет четной. Заметим, что y - нечетная цифра так как n - нечетно. ~~Тогда~~ давайте как бы сделаем умножение в столбик: $\ldots xy \cdot \ldots xy$

Задача 2 (продолжение)

Заметим, что последняя цифра всегда нечетная ($y \cdot y \not\vdots 2$). Но заметим, что в разряд десятков всегда либо ничего не переходит, либо переходит четная цифра, потому что $1^2=1$, $3^2=9$ (у них ничего не переходит), а $5^2=25$, $7^2=49$, $9^2=81$ (у них переходит четная цифра). То есть если мы посмотрим на наши последние две цифры в умножении, то ~~...~~ $\dfrac{\times \begin{matrix} \dots xy \\ \dots xy \end{matrix}}{fz}$, то z - нечетная, а $f \equiv x \pmod 2$, потому что $y \cdot x \equiv x \pmod 2$, так как y-нечетная. $f \equiv x \pmod 2$, а еще потому что от y^2 всегда переходит либо 0 (ничего), либо четная цифра), то есть y^2 не влияет на десятки. Тогда по такой же аналогии: $\dfrac{\times \begin{matrix} \dots xy \\ \dots xy \end{matrix}}{\dots fz}$ d, где $d \equiv x \pmod 2$. То есть $f+d \equiv x+x \equiv 2 \cdot x \equiv 0 \pmod 2$, то есть цифра в десятках всегда четная.

Ответ: Нет, нельзя.

Задание 3.

Пусть девятизначное число будет $\overline{d_1 d_2 \dots d_9}$. Сейчас я хочу узнать полезные свойства про получившееся

Продолжение задачи 3(1)

дромы. Тогда если можно ~~д~~ изменить одну цифру, чтобы стало палиндромом, то ~~такое~~ у такого числа очевидно должно выполняться ровно три равенства из четырех: $a_1 = a_9$; $a_2 = a_8$; $a_3 = a_7$; $a_4 = a_6$. То есть надо посчитать количество таких чисел. Сколько чисел, у которых $a_1 \neq a_9$ (другие равенства выполняются). Очевидно, что $1 \le a_1 \le 9$, а $0 \le a_2 \le 9$, значит выбрать a_1 — 9 вариантов и на каждый из них по 9 вариантов выбрать a_2 (так как $a_1 \neq a_2$) то $(10-1=9)$. То есть количество вариантов: $81 \cdot x$, где x — кол-во вариантов выбрать остальные 8 цифр. Не сложно заметить, что $x = 10^4$, потому что $0 \le a_2, a_3, a_4, a_5 \le 9$, и при этом a_6, a_7, a_8, a_9 определяются однозначно.

Значит, когда $a_1 \neq a_9$, то вариантов $81 \cdot 10^4$. Теперь, что если $2 \le i \le 4$ и $a_i \neq a_{9-i+1}$? Тогда заметим, что кол-во вариантов выбрать a_i и a_{9-i+1} равно $10 \cdot 9 = 90$ (так как a_i можно выбрать 10 способами и на каждый из них 9 способов выбрать a_{9-i+1}, так как $a_i \neq a_{9-i+1}$). А все остальные цифры это $9 \cdot 10^3$ способов (по аналогии с тем, что написано раньше, но не 10^4, потому

Бланк ответов

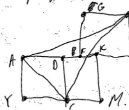
Продолжение задача 3 (2)

что $a_1 > 0$. То есть для каждого $2 \le i \le 4$ кол-во вариантов это $90 \cdot 9 \cdot 10^3$. То есть общее количество вариантов это $8 \cdot 10^4 + (4-1) \cdot 90 \cdot 9 \cdot 10^3 = 10^3 \cdot (80 + 3 \cdot 90 \cdot 9) = 10^3 \cdot (80 + 3 \cdot 810) = 10^3 \cdot (80 + 2430) = 10^3 \cdot 2510 = 2510000$ вариантов.

Ответ: 2510000 чисел.

Задание 4.

Сделаем рисунок и я помечу дополнительные точки:



~~Проведем AC. Так как AC - диагональ в квадрате ADCY, то $\angle DAC = \angle DCA$ (известный факт, доказательство: AD = DC, значит $\triangle ADC$ равнобедренный, значит $\angle DAC = \angle DCA$). Вспомним факт, что в треугольнике большая сторона лежит напротив большего угла. Значит надо доказать, что $\angle ACB > \angle CAB > \angle BAD > \angle BDA$.~~ Давайте заметим, что $DK = FE$ (квадраты равны) $\to DK = DF + FK$, $FE = FK + KE \to DF = KE$. Давайте проведем

Продолжение задача 4.

~~Проведем~~ ~~[illegible]~~ Если посмотрим на пересечение прямой BE и CM. Пусть это точка H_1. Тогда так $\angle MKE=90^\circ$, $\angle KEH_1=90^\circ$, $\angle KMH_1=90^\circ$, то по сумме углов четырехугольника $\angle EH_1M=90^\circ$. Аналогично пусть пересечение прямых DC и GB будет H_2, тогда $\angle DH_2G=90^\circ$ ($\angle H_2DF=90^\circ$, $\angle DFG=90^\circ$, $\angle FGH_2=90^\circ$). То есть KEH_1M — это прямоугольник значит в нем $MH_1=KE$, и в $DFGH_2$ $GH_2=DF$. Так как $KE=DF$ (доказывал раньше), то $MH_1=GH_2$.

~~Значит~~ Пусть $FK=x$, $KE=y$. ~~[illegible]~~ Тогда $BE=x+y$, $AE=2x+3y$, $CH_1=x+2y$, $BH_1=2x+2y$. Тогда по теореме пифагора $AB=\sqrt{AE^2+EB^2}$, $CB=\sqrt{CH_1^2+H_1B^2}$, если $AB>BC$, то $\sqrt{AE^2+EB^2}>\sqrt{CH_1^2+H_1B^2}\to AE^2+EB^2>CH_1^2+H_1B^2\to$
$\to(2x+3y)^2+(x+y)^2>(x+2y)^2+(2x+2y)^2\to 4x^2+9y^2+12xy+x^2+y^2+2xy>$
$>x^2+4y^2+4xy+4x^2+4y^2+8xy\to 5x^2+10y^2+14xy>5x^2+8y^2+12xy\to$
$\to 2xy+2y^2>0$, это неравенство выполняется, так как $x>0$, $y>0$ ($FK>0$, $KE>0$). Значит $AB>BC$.

+

Задача 5.

Докажем от противного. Допустим, что каждая сумма это простое число. Есть два случая:
1) есть четверка с суммой два.
2) нету

Пусть последовательность цифр это $a_1 \ldots a_{20}$ (20 цифр всего, потому что $10 \cdot 2 = 20$).

Разберем второй случай: если нету, то посмотрим на сумму в четверках $(a_1 a_2 a_3 a_4)$, $(a_5 \ldots a_8)$ $(a_9 \ldots a_{12}) \ldots (a_{17} \ldots a_{20})$
Их всего пять четверок, потому что $\frac{20}{4} = 5$. Так как нету четверки с суммой два, то в каждой из этих четверок сумма - простое число большее двух.
Все простые числа большие двух всегда нечетные.
То есть с одной стороны $a_1 + a_2 \ldots + a_{20}$ - нечетное число, потому что это сумма пяти нечетных чисел (5-нечетное), а с другой $a_1 + a_2 \ldots + a_{20} = 2 \cdot (0 + 1 \ldots + 9)$.
Но $2 \cdot (0 + 1 \ldots + 9) = 2 \cdot 45 = 90$ - четное число.
~~А~~ Противоречие.
Первый случай: Заметим, что в этой четверке будет перестановка цифр 0, 0, 1, 1, другие перестановки дают сумму > 2. Значит других четверок

Дополнительный лист

~~Продолжение задача 5~~

Продолжение задача 5.

с суммой два не будет. Давайте посмотрим на ~~пересечение двух~~ две подряд четвёр~~ки~~ки (четверки у которых в пересечении 3 элемента). Тогда если ~~у них~~ сумма в каждой из них не равна 2, то крайние элементы одинаковой четности, то если есть четверка $a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, a_{i+3}$ и $a_{i+1}, a_{i+2}, a_{i+3}, a_{i+4}$, то $a_i \equiv a_{i+4} \pmod 2$, потому что $a_i + a_{i+1} + a_{i+2} + a_{i+3} \equiv$ $\equiv a_{i+1}, a_{i+2}, a_{i+3}, a_{i+4} \pmod 2$. Но заметим, что если первая четверка $(a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, a_{i+3})$ в сумме дает 2, то $a_i \not\equiv a_{i+4}$ (по той же аналогии). Или если ~~четверка~~ вторая четверка дает ~~2~~ в сумме 2, то тоже самое. То есть ~~в этом случае~~ количество четных и нечетных чисел не будет равно 10, если четверка с суммой 2 будет иметь вид 1,0,0,1. или 0,1,1,0, потому что тогда четных чисел будет 12, нечетных 8 ~~или~~ или наоборот.

—