ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2502974052147

Титульный лист

Направление ☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ политология ☐ русский язык ☐ социология ☐ физика ☐ химия ☐ филология

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☒ 10 ☐ 11

Фамилия ЛАВРОВА

Имя МАРИНА

Отчество ОЛЕГОВНА

Дата рождения 29 08 2005

Город участия ЧЕБОКСАРЫ

Аудитория 1

Телефон 89877258848

Дата 26 02 2022 **Подпись**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2502974052147

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ политология ☐ русский язык ☐ социология ☐ физика ☐ химия ☐ филология

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☒ 10 ☐ 11

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Время выхода с 11:54 до 11:56

Примечание

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	0	0	0	0					
Балл члена жюри №2	20	00	00	00	00					

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Балл члена жюри №1										
Балл члена жюри №2										

Итоговый балл 020

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

Задача 1

Обозначим трёхзначное число как xyz, при том, что $x<y<z$ $\Rightarrow z \geq 3$

Квадрат этого числа имеет как минимум 5 цифр в своей записи

$\times\, xyz$
$\, xyz$

обозначим его как $abcdeF$, где a - может равняться 0, если число пятизначное.

Заметим, что в разряде единиц этого числа только одно слагаемое при умножении, т.е $F = z^2 - 10\cdot n$, где n - число кот может быть равно 0, в случае если переполнения в следующий разряд нет

Т.к в квадрате все числа разл и расп в порядке возраст $\Rightarrow a<b<c<d<e<F$

$\Rightarrow F \geq 5$ (в случае если $a=0$)

Куб этого числа имеет как минимум 7 цифр в своей записи (когда $g=0$)

$\times\, abcdeF$
$\, xyz$

обозначим его как $ghijklm$ (при отсутствии переполн. в старших позициях) причем здесь аналогично последний разряд единиц складывается только из произведения $F\cdot z$, т.е $m = z^3 - 10\cdot p$, где p в завис от переполнения число кот может быть $=0$

Также заметим, что в кубе все цифры различны и возрастают $\Rightarrow$ $g<h<i<j<k<l<m \Rightarrow m \geq 7$ (при отсутствии переполнений)

Получим

$$\begin{cases} z \geq 3 & (1) \\ z^2 - 10\cdot n \geq 5 & (2) \\ z^3 - 10\cdot p \geq 7 & (3) \end{cases}$$

z	z^2	z^3
1	1	1
2	4	8
3 ✓	9 ✓	27 ✓
4 ✓	16 ✓	64
5 ✓	25 ✓	125
6 ✓	36 ✓	216
7 ✓	49 ✓	343
8 ✓	64	512
9 ✓	81	729 ✓

проанализировав таблицу квадратов и кубов всех цифр мы получили, что для всех трёх условий соответств. только одна цифра $z=3$. А значит если $z>y>x$ и $z=3 \Rightarrow$ $x=1$, $y=2$, $z=3$

Однако квадрат 123:

$$\begin{array}{r} \times\, 123 \\ 123 \\ \hline 369 \\ 246 \\ 123 \\ \hline 15129 \end{array}$$

- не подходит по усл (цифры повтор)

~~А значит такого числа не существует~~!

А значит такое число найти невозможно (т.к других вариантов кроме $z=3$ нет)

Задача 4

$K_{max}(m) + K_{min}(m) = n$

$p_{max}(n) + p_{min}(n) = m$

при этом если $K_{max}(m)$ - макс знач $\neq m$, а $K_{min}(m)$ - мин знач $\neq 1$

$\Rightarrow$ $m = K_{max} \cdot K_{min}$

аналогично $n = p_{max} \cdot p_{min}$ $\Rightarrow$

$\underset{a}{K_{max}(m)} + \underset{b}{K_{min}(m)} = p_{max}(n) \cdot p_{min}(n)$

$\underset{c}{p_{max}(n)} + \underset{d}{p_{min}(n)} = K_{max}(m) \cdot K_{min}(m)$

$a + b = c \cdot d$

$c + d = a \cdot b$

Задача 2

$9_в\ 9_в\ 9_в\ 9_в\ 9_в\ 8_в\ 1\ 1\ 1$ $\quad$ $9_в\ 9_в\ 9_в\ 9_в\ \cancel{8_в}^{9}\ 1\ 8_в\ 1\ 1$

Ответ: $\cancel{9 \cdot 8 \cdot 4} = \cancel{2\ldots}$ вариантов $9^5 \cdot 8 \cdot 4$ $\quad$ $9_в\ 9_в\ 9_в\ 9_в\ 9_в\ 1\ 1\ 8_в\ 1$

для расстановки обычного $\quad$ $9_в\ 9_в\ 9_в\ 9_в\ 9_в\ 1\ 1\ 1\ 8_в$

Задача 5 лист 1

Бланк ответов

Рассмотрим все возможные случаи выр-я $S=\frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{abc+1}$

1) Предп, что ~~все 3 числа = 0~~ 2 из 3 чисел равны нулю, ~~числа положит~~! тогда

$a+b+c=0+0+c=1$

$S=\frac{1\cdot1\cdot(c+1)}{0+1}=c+1=2$

2) Предп, что одно из чисел равно нулю, тогда

$a+b+c=0+b+c=1$

$S=\frac{1\cdot(b+1)(c+1)}{0+1}=bc+b+c+1=bc+2=0{,}5^2+2=2{,}25$

т.к $b+c=1$ bc - max при $b=c=\frac{1}{2}=0{,}5$

3) т.к $a+b+c=1$ все три числа отриц быть не могут, поэтому рассм. случай, когда все числа не равны 0.

$\frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{abc+1}$ заменим a $a=1-b-c$

$S=\frac{(2-b-c)(b+1)(c+1)}{(1-b-c)bc+1}=\frac{(2b+2-b^2-b-bc-c)(c+1)}{bc-b^2c-bc^2+1}=$

$=\frac{(2+b-b^2-bc-c)(c+1)}{bc-b^2c-bc^2+1}=\frac{2c+bc-b^2c-bc^2-c^2+2+b-b^2-bc-c}{bc-b^2c-bc^2+1}=$

$=\frac{c+b+2-b^2c-bc^2-c^2-b^2}{bc-b^2c-bc^2+1}=\frac{c+b+1-c^2-b^2-bc}{bc-b^2c-bc^2+1}+1$ $\Rightarrow$

чтобы S стало больше полученного максимума в пункте 2 нам нужно доказать, что

$\frac{c+b+1-c^2-b^2-bc}{bc-b^2c-bc^2+1}>1{,}25$

$\frac{(c+b)(1-c-b)+1+bc}{bc(1-c-b)+1}>1{,}25$

$\frac{(c+b)(1-c-b)+1+bc}{1}>1{,}25bc(1-c-b)+1{,}25$

Задача 5 лист 2

$(c+b)(1-c-b)+bc > 1{,}25bc(1-b-c)+0{,}25$

$\cancel{(1-c-b)(c+b-1{,}25bc)+bc-0{,}25>0}$

$\cancel{(c+b)(1-c-b)=}$

$c+b-c^2-cb-cb-b^2+cb>1{,}25bc-1{,}25b^2c-1{,}25bc^2+0{,}25$

$c+b-c^2-cb-b^2-1{,}25cb+1{,}25b^2c+1{,}25bc^2-0{,}25>0$

$c+b-c^2-2{,}25bc-b^2+1{,}25b^2c+1{,}25bc^2-0{,}25>0$

$(c+b)-(c+b)^2-0{,}25bc+1{,}25b^2c+1{,}25bc^2-0{,}25>0$

$\underset{1-a}{(c+b)}\underset{a}{(1-c-b)}+0{,}25bc\underbrace{(5b+5c-1)}_{4-5a}>0{,}25$

$bc \leq 0{,}25$

$(c+b)(1-c-b)$ - max при $a=0{,}5$ тогда: $(1-a)a=0{,}25$

~~однако~~ то