ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2502696265476

Титульный лист

Направление

- [x] информатика
- [ ] история
- [ ] математика
- [ ] обществознание
- [ ] политология
- [ ] русский язык
- [ ] социология
- [ ] физика
- [ ] химия
- [ ] филология

Класс [ ] 8 [ ] 9 [x] 10 [ ] 11

Фамилия ТУИСОВ

Имя ЕГОР

Отчество МИХАЙЛОВИЧ

Дата рождения 11 09 2005

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Аудитория 325

Телефон 89920199338

Дата 01 03 2022 **Подпись**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2502696265476

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление

- [x] информатика
- [ ] история
- [ ] математика
- [ ] обществознание
- [ ] политология
- [ ] русский язык
- [ ] социология
- [ ] физика
- [ ] химия
- [ ] филология

Класс

- [ ] 8
- [ ] 9
- [x] 10
- [ ] 11

Заполняется организаторами

Количество доп. листов 0 2

Время выхода с : до :

Примечание

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	15	11	17	08					
Балл члена жюри №2	20	15	11	17	08					

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Балл члена жюри №1										
Балл члена жюри №2										

Итоговый балл 071

Подпись члена жюри №1 Ивн

Подпись члена жюри №2 Шат

Пример заполнения

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

№1

Заметим, что если второй игрок будет повторять за первым, то у него всегда будет такая возможность. То есть, если первый поставил пешку $(0, X)$; то второй совершает ход $(0, X)$; если же первый срубил пешкой $(0,X)$ пешку $(1, y)$, то второй рубит пешкой $(1;X)$ пешку $(0, y)$. Он может так делать потому что: 1) перед ходом первого доска зеркальна (полоса 0 и 1 совпадают)

2) ~~если пер~~ $X \neq y$, т.к. пешки не рубят вперёд

3) $(1; y)$ имеется пешка $\Rightarrow (0; y)$ то не есть т.к. пункт 1

4) правила соблюдаются $|x-y| = 1$ (т.к. первый уже сходил так)

Таким образом просто повторяя ходы первого второй выиграет, просто потому что первый ходит раньше и не сможет этого сделать то не раньше.

(+)

Причём игра обязательно завершится, потому что пешки, которыми рубили уже никуда не дойдут, рано или поздно все клетки на поле окажутся заняты.

Ответ: 1) второй

2) второй

№2

1) $y_0 = 1$ $n = 9$

X	1	2	3	6	9	18	...
y	1	1	3	3	9	9	
i	0	1	2	3	4	5	

далее $\begin{cases} x_i = (i-3)\cdot 9, & i \geq 4 \\ y_i = 9 \end{cases}$

очевидно: $((x_i - 1) \vdots 9) \& (y_i = 9) \Rightarrow x_i \vdots 9 \Rightarrow$
$\gcd(x_i, 9) = 9 = y_i$

(+)

-) $\forall x_0, n \in \mathbb{N}$: $y \in \mathbb{N}$

$\forall i,j: i \le j \Rightarrow \gcd(y_i, y_j) = y_i$

действительно, если для какого то i y стало неким числом d, то все последующие x_i будут делится на d (по св-ву делимости) $\Rightarrow$ $n \vdots y$; $x_i \vdots y$ $\Rightarrow \gcd(x_i, n) \vdots y$

значит y будет ~~только~~ не убывать ~~возрастать~~.

То что $y_i = n$ означает то $\gcd(x_i, n) = n \cdot k \Rightarrow$ ~~$x_i = n \cdot k$~~, $k \in \mathbb{N}$

если y до этого момента меняться не будет, то ~~$x_0 + y$~~

$y = \gcd(x_0, n)$, $n = y \cdot p$ $\quad p, p_0 \in \mathbb{N}$

$x_0 = y \cdot p_0$

$x_i = y \cdot p \cdot k = y \cdot (p \cdot k - p_0 + p_0) = x_0 + y \cdot (p \cdot k - p_0)$

однако в процессе y может измениться, тогда при очередном вычислении x мы могли „перескочить" через $n \cdot k$, т.е. $\begin{cases} x_{i-1} < n \\ x_i > n \end{cases}$

докажем что так быть не может:

$\circ/n$ $\quad x_{i-1} < n \quad \gcd(x_i - 1, n) = y$

$x_i > n \quad x_i = n + a$

~~$x_{i-1} = y \cdot p$~~

$n = y \cdot b$

$a, b, k, p \in \mathbb{N}$

~~$x_i = (x_{i-1} + y) \cdot y$ ~~ (некоторое число a)

~~из св-ств делимости получаем:~~

~~$(x_i - 1) \vdots y$, $y \vdots y$, $n \vdots y \Rightarrow a \vdots y$~~

~~однако $y \le n$~~

~~получается, что к числу делящемуся на y прибавили y и получили число большее~~

$x_{i-1} + y = x_i = y \cdot p + y = y(p+1)$

$n = y \cdot b$ $\quad y \cdot p < y \cdot b < y \cdot (p+1) \;|:y$, ~~но такого b~~.

$x_{i-1} < n < x_i$ $\quad p < b < p+1$ но такого натурального b не существует

следовательно ~~нет~~ мы никак не могли перескочить через $n \cdot k$ $\Rightarrow$ и рано или поздно попадём на него $\Rightarrow$ ЧТД

Ответ: $\forall x_0, n \in \mathbb{N}$ А если $x_0 > n$ изначально?

10 баллов. (+)

№4 Решение:

$2022_{10} = 11111100110_2$ (10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0)

$1_{10} = 00000000001_2$

(в условии не сказано, но решение предполагает, что граф полный, потому что иначе про него ничего не известно)

чтобы прийти из 1 в 2022 нужно будет хотя бы раз изменить, например, 5 бит на 1, в любом случае после перехода $a \to 2022$ он будет 1.

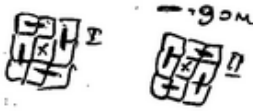
Заметим, что бита числа при передвижении никак друг на друга не влияют. То есть изменение значения i бита на противоположное будет стоить 2^i минимум, как бы мы не выбрали путь. ~~если не~~ Почему?

17 баллов

Таким образом, чтобы прийти из 1 в 2022 придется изменить биты 0, 1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10, биты же 4, 3 менять не нужно. Получаем что искомый путь будет ~~стоить~~ длиной как минимум 11111100111_2 (10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0) $\Rightarrow 2023_{10}$. И такой путь существует:

$1 \to 2022$ – в всего одно ребро.

Ответ: 2023.

№3. 1) 

— доминошка ▯ – ячейка [X] – отсутствует

Ответ: 2 варианта. (+)

2) 2·2 – если они независимы (доминошки полностью лежат в одном квадрате)

\+

2 – доминошки переходят через границу квадратов

и наоборот

(+)

Ответ: 6

3) Заметим, что если мы знаем ответы для $n-1$ и $n-2$, то посчитать ответ для n легко.

см доп лист 1

$d_n = d_{n-1} \cdot 2 + d_{n-2} \cdot 2$ $n > 2$

$d_1 = 2$

$d_2 = 6$

очень похоже на динамическое программирование.

Дополнительный лист №1

доформ для такого потому что:

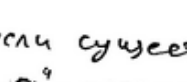
~~d_n = 2 варианта квадрата номер n и d_{n-1} вариантов расстановки заполнения для n-1 квадратов, т.к они не пересекаются то перемножаем~~

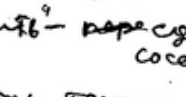
~~+~~

~~квадраты n и n+1 пересекаются (имеют общую домино-шку зачем и далее), очевидно если n и n-1 пересекаются, то n-1 и n-2 пересекаться не могут~~

назовём квадраты „пересекающимися" если существует доминошка лежащая и на том и на другом, а „соединить" — ~~пересделать~~ сделать пересекающимися соседние

Очевидно что подряд можно соединить ~~только~~ любое количество квадратов и всегда двумя способами


— нечётная длина


— чётная длина

значит если мы знаем ответ для всех чисел до n, то можем посчитать и n

~~$d_n = 2(d_{n-1} + d_{n-}$~~

$$d_n = 2(\underbrace{d_{n-1}}_{\text{если квадрат } n \text{ стоит обособленно } = d_{n-1}\cdot 2} + \underbrace{d_{n-2} + d_{n-3} + \ldots + d_1 + d_0}_{\text{если последние } k \text{ квадратов последовательно пересекаются, то вариантов будет } = 2\cdot d_{n-k}}) = 2d_{n-1} + d_{n-1} = 3d_{n-1}$$

$d_0 = 1$ — пустое поле заполнить только 1 вариант

~~$d_1 = 2$~~ и первые несколько значений:

n	0	1	2	3	4	5
d	1	2	6	18	54	162

...

Остается лишь посчитать до n=2023, к сожалению, сделать этого я не могу.

Ответ: $d_n = 2(d_{n-1} + d_{n-2} + \ldots + d_0) = 2\cdot 3^{n-1}$

$d_0 = 1$

8

Данилов

Дополнительный лист №2

№5 1) докажем по индукции:

БИ: S_0 является предиксом S_1 "a" и "abb"

ПИ: S_{n-2} префикс S_{n-1}

ШИ: докажем, что в таком случае S_{n-1} предикс S_n

Док-во: начав применять функционал f к S_{n-1} или на самом деле применим его к S_{n-2}. Т.к. S_{n-2} предикс S_{n-1}. Значит в начале строки S_n получим строку S_{n-1} => S_{n-1} префикс S_n ЧТД.

2) всего 16 строк длины 4:

1. aaaa –
2. aaab +
3. aaba +
4. aabb +
5. abaa +
6. abab –
7. abba +
8. abbb +
9. baaa +
10. baab +
11. baba –
12. babb +
13. bbaa +
14. bbab +
15. bbba +
16. bbbb –

в S

~~очевидно что за любым a всегда следует либо 2b или 3b, или~~ очевидно что в S нигде не встретится 4a или 4b подряд

~~а за если перед b стоит a, то после стоит b~~

S_1 = abbbaabaaabbabbbaaabbabb

Т.к в строке встречаются все пары "aa" "ab" "ba" "bb", то любая конкатенация "abb" "baa" будет присутствовать в строке:

	a	b
a	abbabb	~~abb~~ baaabb
b	abbbaa	baabaa

выберем отсюда все 4х символьные подстроки и получим ответ

ответ: 10 только их 12:(1 балл за способ.