ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2502226027833

Титульный лист

Направление ☐ информатика ☐ история ■ математика ☐ обществознание ☐ политология ☐ русский язык ☐ социология ☐ физика ☐ химия ☐ филология

Класс ☐ 8 ■ 9 ☐ 10 ☐ 11

Фамилия ХАСАНОВ

Имя ДМИТРИЙ

Отчество ВАДИМОВИЧ

Дата рождения 31 01 2006

Город участия НИЖНИЙ ТАГИЛ

Аудитория 215

Телефон +79826933847

Дата 26 02 2022 **Подпись** Хаl

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2502226027833

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление

- [ ] информатика
- [ ] история
- [x] математика
- [ ] обществознание
- [ ] политология
- [ ] русский язык
- [ ] социология
- [ ] физика
- [ ] химия
- [ ] филология

Класс [ ] 8 [x] 9 [ ] 10 [ ] 11

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Время выхода с : до :

Примечание

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	20	5	20	20					
Балл члена жюри №2	20	20	5	20	20					

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Балл члена жюри №1										
Балл члена жюри №2										

Итоговый балл 85

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

№1

Посчитаем кол-во различных мишек: цвет выбираем k способами, а размер 6, следовательно всего 6k различных мишек. Чтоб гарантированно нашлось 3 одинаковых мишки, каждый мишка должен быть хотя бы в двух экземплярах и ещё один, который как раз и будет 3 экземпляром какого-то мишки (иначе говоря $6k \cdot 2 + 1 \leq 125$).

$6k \cdot 2 + 1 \leq 125$

$12k \leq 124$

$k \leq \frac{124}{12} = 10\frac{1}{3}$ V

Но нужно, чтобы при любом варианте нашлось 3 одинаковых при k=10

Значит наибольшее подходящее k это 10.

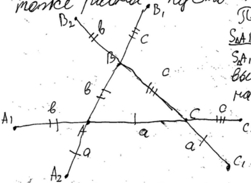
При $k=10$, различных мишек 60, а значит по два экземпляра 120, а $125-120 > 1$ (что нам подходит).

А при $k=11$, различных мишек 66, а значит мы не можем утверждать, что найдётся 3 одинаковых, ведь $125 < 132$ (не всегда найдутся 3 одинаковых, ~~ведь~~ пример: у 60 мишек 2 экземпляра, у 5 один и один экземпляр не попался вообще, $60+5+1=66$ мишки $60 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 0 = 125$ экземпляров и нет ни одного попадающегося трижды).

Ответ: при $k=10$.

№4

Раз $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$, то их площади тоже равны, пусть они по X.



Пусть $AC=a$, $AB=b$, $BC=c$

$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_1AB}} = \frac{AC}{A_1A}$ (ведь у них общая высота, опущенная из B на прямую A_1C)

$S_{\triangle A_1AB} = S_{\triangle ABC}\cdot\frac{A_1A}{AC} = \frac{b}{a}x$

$\frac{S_{\triangle A_1AB}}{S_{\triangle A_1BB_1}} = \frac{AB}{BB_1}$ (общая высота, опущенная из A_1 на прямую AB_1)

$S_{\triangle A_1BB_1} = S_{\triangle A_1AB}\cdot\frac{BB_1}{AB} = \frac{c}{b}x\cdot\frac{b}{a} = \frac{c}{a}x$

Аналогично рассуждая получим:

$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ACC_1}} = \frac{c}{a} \Rightarrow S_{\triangle ACC_1} = \frac{a}{c}x$, $\frac{S_{\triangle ACC_1}}{S_{\triangle A_1AC_1}} = \frac{a}{b} \Rightarrow$ $S_{\triangle A_1AC_1} = \frac{b}{a}\cdot\frac{a}{c}x = \frac{b}{c}x$

$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle BB_1C}} = \frac{b}{c} \Rightarrow S_{\triangle BB_1C} = \frac{c}{b}x$, $\frac{S_{\triangle BB_1C}}{S_{\triangle B_1CC_1}} = \frac{c}{a} \Rightarrow S_{\triangle B_1CC_1} = \frac{a}{c}x\cdot\frac{c}{b} = \frac{a}{b}x$

$S_{\triangle A_1B_1C_1} = S_{\triangle ABC}+S_{\triangle A_1AB}+S_{\triangle A_1BB_1}+S_{\triangle BB_1C}+S_{\triangle B_1CC_1}+S_{\triangle C_1CA}+$
$+S_{\triangle C_1AA_1} = x+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}x+\frac{c}{b}x+\frac{a}{b}x+\frac{a}{c}x+\frac{b}{c}x = \cancel{x+\frac{2bx}{a}+\frac{2cx}{b}+\frac{2ax}{c}} = x+\frac{b+c}{a}x+\frac{a+c}{b}x+\frac{a+b}{c}x$

Аналогично посчитаем с $\triangle A_2B_2C_2$:

$\frac{S_{\triangle A'B'C'}}{S_{\triangle B'C'C_2}} = \frac{a}{c} \Rightarrow S_{B'C'C_2} = \frac{c}{a}x$, $\frac{S_{\triangle B'C'C_2}}{S_{\triangle B_2B'C_2}} = \frac{c}{b} \Rightarrow S_{B_2B'C_2} = \frac{b}{c}x\cdot\frac{c}{a} = \frac{b}{a}x$

$\frac{S_{\triangle A'B'C'}}{S_{\triangle A_2A'C'}} = \frac{b}{a} \Rightarrow S_{\triangle A_2A'C'} = \frac{a}{b}x$; $\frac{S_{\triangle A_2A'C'}}{S_{\triangle A^2C'C_2}} = \frac{a}{c} \Rightarrow S_{\triangle A^2C'C_2} = \frac{c}{a}x\cdot\frac{a}{b} = \frac{c}{b}x$

$\frac{S_{\Delta A'B'C'}}{S_{\Delta A_1B_2B_1}} = \frac{c}{b} \Rightarrow S_{\Delta A_1B_2B_1} = \frac{b}{c}x$, $\frac{S_{\Delta A_1'B_2B_1'}}{S_{\Delta A_2A'B^2}} = \frac{b}{a} \Rightarrow S_{\Delta A_2A'B^2} = \frac{a}{b}x$ $\cdot\frac{b}{c}$ $\frac{a}{c}x$

$S_{\Delta A_2B_2C_2} = S_{\Delta A'B'C'} + S_{\Delta B'C'C^2} + S_{\Delta B_2^2B'C_2} + S_{\Delta A_2A'C'} + S_{\Delta A_2C'C_2} +$
$+ S_{\Delta B_2B'A_2'} + S_{\Delta A'A_2B_2} = x + \frac{c}{a}x + \frac{b}{a}x + \frac{a}{b}x + \frac{c}{b}x + \frac{b}{c}x + \frac{a}{c}x =$
$= \cancel{x + \frac{2cx}{a} + \frac{2bx}{c} + \frac{2ax}{b}} = x + \frac{c+b}{a}x + \frac{a+c}{b}x + \frac{b+a}{c}x$

Не трудно заметить, что $S_{\Delta A_1B_1C_1} =$
$= S_{\Delta A_2B_2C_2} = x + \frac{c+b}{a}x + \frac{a+c}{b}x + \frac{b+a}{c}x$.

ч. т. д. +

№2

$И \cdot З \cdot У \cdot М + Р \cdot У \cdot Д = У(И \cdot З \cdot М + Р \cdot Д) = 2022$

Раз У - цифра, то У может равнять-ся 1, 2, 3, ~~337~~ 6.

2022	2
1011	3
337	337
1	

~~при У = 1, И·З·М+Р·Д = 2022~~

Заметим, что максимальное значение $И \cdot З \cdot М + Р \cdot Д = 9 \cdot 8 \cdot 7 + 6 \cdot 5 = 504 + 30 = 534$, но при $У = 1, 2, 3$ значение $И \cdot З \cdot М + Р \cdot Д$ соответственно должны равняться 2022, 1011, 674, что явно больше 534. ✓

Значит $У = 6$, а $И \cdot З \cdot М + Р \cdot Д = 337$. ~~значит~~

$Р \cdot Д \le 72$ (при $Р, Д = 9, 8$), ~~337~~ $И \cdot З \cdot М \ge 337 - 72 =$
$= 265$.

Теперь переберем все подходящие И, З, М:
(6 в переборе не учитывается, ведь $У = 6$)

(в нашей сумме $И \cdot З \cdot М + Р \cdot Д_7$ все буквы разные, пока будем считать, что $И=1$ $З=2$ $М=3$ и $И=1$ $З=3$ $М=2$ это одно и тоже, но когда найдём корни учтём эти перестановки.) $\Rightarrow$ ~~500~~ пусть $И > З > М$

$(И, З, М) = (9, 8, 7)$ $И \cdot З \cdot М = 504 > 337$

$(И, З, М) = (9, 8, 5)$ $И \cdot З \cdot М = 360 > 337$

$(И, З, М) = (9, 8, 4)$ $И \cdot З \cdot М = 288 \Rightarrow Р \cdot Д_7 = \cancel{57}$ 49, но

~~57~~ 49 нельзя представить, как произведение 2 цифр

$(И, З, М) = (9, 8, 3)$ $И \cdot З \cdot М = 216 < \cancel{337}$ 265

$(И, З, М) = (9, 7, 5)$ $И \cdot З \cdot М = 315 \Rightarrow Р \cdot Д_7 = 22$, но

22 нельзя представить, как произведение 2 цифр

$(И, З, М) = (9, 7, 4)$ $И \cdot З \cdot М = 252 < 265$

$(И, З, М) = (9, 5, 4)$ $И \cdot З \cdot М = 180 < 265$

$(И, З, М) = (8, 7, 5)$ $И \cdot З \cdot М = 280 \Rightarrow Р \cdot Д_7 = 57$, но

57 нельзя представить, как произведение 2 цифр

$(И, З, М) = (8, 7, 4)$ $И \cdot З \cdot М = 224 < 265$

$(И, З, М) = (8, 5, 4)$ $И \cdot З \cdot М = 160 < 265$

$(И, З, М) = (7, 5, 4)$ $И \cdot З \cdot М = 140 < 265$

Оставшиеся варианты либо меньше 265 и не подходят нам, либо являются перестановками разобранных вариантов, которые тоже нам не подходят.

Ответ: решений нет.

+

№5

Заметим, что с 1 по 720 слово в алфавите начинаются с первой буквы алфавита (их 720, что равняется кол-во перестановок оставшихся 6 букв).

Номер нашего числа 3634, а значит М имеет номер 6, ведь $6\cdot720 > 3634 > 5\cdot720$.

Теперь у нас слово ЕТРИКА, но и новый алфавит, в котором первые пять букв, которые соответствуют старому алфавиту, а 6 соответствует 7 (ведь 6 буква первоначального алфавита уже занята).

$3634 - 5\cdot720 = 34$

$34 < 120 (5!)$ ⇒ Е - первая буква изначального алфавита.

Осталось слово ТРИКА и номера букв в изначальном алфавите 2, 3, 4, 5, 7

$24\cdot2 > 34 > 24\cdot1$ ⇒ Т вторая буква алфавита для 5 букв или 3 в изначальном алфавите

$34 - 24\cdot1 = 10$, слово РИКА и номера букв 2, 4, 5, 7

$6\cdot2 > 10 > 6\cdot1$ ⇒ Р вторая буква алфавита для 4 букв или 4 в изначальном

$10 - 6 = 4$, слово ИКА и номера 2, 5, 7

Раз из 6 возможных перестановок букв И, К, А ИКА четвёртая, то в алфавите для трёх букв И - вторая, К - третья, А - первая, или И = 5, К = 7, А = 2 в изначальном алфавите. (до ИКА в этом алфавите слова, которые имеют вид 123, 132, 213, а после 312 и 321, где цифра обозначает номер буквы, ИКА соответствует 231).

По итогу у правильный порядок букв в алфавите:

Е А Т Р И М К
1 2 3 4 5 6 7

Слово МАТЕРИК будет иметь номер: М - 6 (до неё осталось 5 букв), значит до неё $5 \cdot 720$ слов, А - 2 (до неё осталось 1), значит до неё $1 \cdot 120$ слов, Т - 3 (до неё осталась одна буква Е, А - уже использована), значит до неё $1 \cdot 24$ слов, Е - 1 (до неё 0), значит до неё ~~0·6~~ 0 слов, Р - 4 (до неё 0), значит до неё ~~0·2~~ 0 слов, И - 5 (до неё 0), значит до неё 0 слов, К - 7 (до неё 0), значит до неё 0 слов.

$5 \cdot 720 + 1 \cdot 120 + 1 \cdot 24 + 0 + 0 + 0 + 0 = 3600 + 120 + 24 = 3744$ номер

* под словами до неё n слов, я имел в виду, что слов с такими же буквами до этого разряда, но с предыдущими буквами в алфавите в рассматриваемом разряде n.

Ответ: ~~3744~~ 3745 номер.

+

№ 3

Раз функции пересеклись в двух точках, то уравнение $x^2 = ax^2 + bx + c$ имеет 2 корня,

$(a-1)x^2 + bx + c = 0$

$D = b^2 - 4c(a-1) = b^2 - 4ac + 4c > 0$; пусть $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

тогда $\sqrt{x_2^2 + y_2^2}^2 + \sqrt{x_1^2 + y_1^2}^2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_1 - y_2)^2}^2$

$\Updownarrow$

$x_2 x_1 + y_1 y_2 = 0$ ✓

+