ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2502308324322

Титульный лист

Направление

- [x] информатика
- [ ] история
- [ ] математика
- [ ] обществознание
- [ ] политология
- [ ] русский язык
- [ ] социология
- [ ] физика
- [ ] химия
- [ ] филология

Класс

- [ ] 8
- [x] 9
- [ ] 10
- [ ] 11

Фамилия ХАСАНОВ

Имя ДМИТРИЙ

Отчество ВАДИМОВИЧ

Дата рождения 31 01 2006

Город участия НИЖНИЙ ТАГИЛ

Аудитория 314

Телефон +79826933847

Дата 01 03 2022 **Подпись** Xal

Пример заполнения

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2502308324322

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление

- [x] информатика
- [ ] история
- [ ] математика
- [ ] обществознание
- [ ] политология
- [ ] русский язык
- [ ] социология
- [ ] физика
- [ ] химия
- [ ] филология

Класс

- [ ] 8
- [x] 9
- [ ] 10
- [ ] 11

Заполняется организаторами

Количество доп. листов 0 1

Время выхода с : до :

Примечание

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	03	03	19	02	12					
Балл члена жюри №2	03	03	19	02	12					

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Балл члена жюри №1										
Балл члена жюри №2										

Итоговый балл 039

Подпись члена жюри №1 Шо

Подпись члена жюри №2 Шо

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

№3

1) Да оно существует, это 15 $15+1+5=21$ (+)

2) Заметим, чтоб такая сумма была 2022 изначальное число должно быть четырёхзначным. Если число пятизначное и более, то только подстрока, содержащее всё это число уже больше 2022. Если число трёхзначное, то такая сумма будет максимум $999+99+99+9+9+9=9(111+11+11+1+1+1)=9\cdot136=1224$, что явно меньше 2022. (почему?)

Раз число четырёхзначное, то представим его в виде $\overline{abcd}$, тогда его сумма равна

$\overline{abcd}+\overline{abc}+\overline{bcd}+\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{cd}+a+b+c+d=1000a+100b+10c+d+$
$+100a+10b+c+100b+10c+d+10a+b+10b+c+10c+d+a+b+c+d=$
$=1111a+222b+33c+4d+\vee 2022$

~~Заме~~ a, b, c и d это цифры исходного числа, причём $a>0$ (ведь число четырёхзначное)

Заметим, что $a=1+$ (иначе $1111a>2022$), а значит $222b+33c+4d \vee 2022-1111\cdot1=911$

Заметим, что $33c+4d$ не более 333 $(33\cdot9+4\cdot9=333)$, а значит достаточно рассмотреть значения $b=3,4$ +(при $b<3$, значение $33c+4d$ должно быть больше максимально допустимого, а при $b>4$, значение $33c+4d$ должно быть отрицательно, что невозможно).

1. При $b=3$, $33c+4d \vee 911-222\cdot 3=245$
$4d$ не более 36, а значит $245 \geqslant 33c \geqslant 209$

$\frac{245}{33} \geqslant c \geqslant \frac{209}{33}$

$7\frac{14}{33} \geqslant c \geqslant 6\frac{11}{33}$

Откуда можно сделать вывод, что c может равняться только 7.

При $c=7$ $33c+4d \vee 245$
$4d \vee 245-33\cdot 7=14$
но $14 \not\vdots 4$

значит при $b=3$ такого числа нет

2. При $b=4$, $33c+4d \vee 911-222\cdot 4=23$
$33c+4d \vee 23$

c может равняться только 0 (иначе $33c+4d > 23$). Но при $c=0$ $4d$ должно равняться 23, но $23 \not\vdots 4$

значит при $b=4$ такого числа нет

Как можем заметить такого числа несуществует. (+)

Ответ: да (это 15), нет.

N5

1) Поймём, когда две вершины соединены ребром:

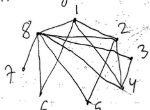
по условию две вершины соединены ребром если $A \text{ xor } B = A+B$, на практике это выполняется если у чисел A и B в двоичной записи нет позиций, на которой у обоих чисел стоит 1.

~~Если в двоичной записи~~ чисел A и B на ~~какой-то позиции стоят~~ у обоих 1, то в результате операции

Если в двоичной записи A и B нет позиции на которой стоят две 1, то в каждой позиции будет стоять цифра одного из чисел, а значит и сумма этих чисел будет равна их xor-~~у~~у (позиции в которых у A и B стоят два 0 мы пропускаем, ведь они на сумму не влияют).

Если в двоичной записи A и B есть не такие позиции, то ~~вы~~ можно в одном из чисел заменять 1 на 0, ~~от~~ после выполнения всех операций мы получим сумму и xor другие, но xor увеличится, а сумма уменьшится относительно A и B, а значит $A \operatorname{xor} B \neq A+B$.

1) Тогда построим такой граф для $N=8$:



Как можем заметить рёбер 13. ⊕

2) В графе есть эйлеров цикл, только если степени всех вершин чётны (в противном случае в какую-то вершину мы сможем попасть, но выйти не сможем). +

$N=1$ нам не подойдёт, ведь тогда вообще не будет рёбер

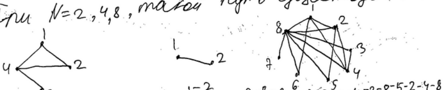
В остальных случаях мы ~~сто~~ можем выделить максимальную степень двойки.

Очевидно, что вершина с таким номером будет соединена со всеми вершинами меньших номеров (во всех разрядах кроме первого стоит 0, а разряда, в котором стоит 1 у максимальной степени двойки в меньших её чисел нет); с вершинами больших номеров она не соединена, ведь по кол-ву разрядов они равны и у всех в первом стоит 1).

~~Значит~~ Пусть 2^n - максимальная степень двойки, которая является вершиной, но тогда её степень 2^n-1, что является нечётным числом, а значит ни при каком N эйлеров цикл не возможен. +

3) Путь будет отличаться от цикла тем, что теперь не обязательно, чтоб наш маршрут начинался и заканчивался в одной точке (т.е. у нас может быть либо 0, либо 2 вершины с нечётной степени, если их 2, то ~~это~~ в этих вершинах начало и конец маршрута).

При $N=2,4,8$, такой путь существует:



3-4-1-2 1-2 7-8-6-1-8-2-1-4-3-8-5-2-4-8

Маршруты

~~При N=~~ Теперь докажем, если 2^n - max степень двойки среди номеров вершин, то вершина 2^n-1 соединена только с вершиной 2^n, ведь у 2^n-1 в двоичной системе в каждом разряде стоит 1, а число у которого в этих разрядах стоят 0 это 2^n (есть еще такие числа, но тогда 2^n не будет наибольшей степенью.

$N=1$ не подходит, ведь рёбер вообще нет.
$N=5,6,7$; при этих N кроме 4 (max степени 2) и 3 (max степени двойки -1) будут содержать нечётную степень так же эти N, что противоречит условию эйлерового пути. почему?

~~Рассмотрим $N \in [9;15]$, с ними ситуа~~

При всех N не являющихся степенью двойки, ситуация аналогична случаю при $N=5,6,7$, действия такие же.

Осталось рассмотреть степени двойки, начиная с 16.

Пусть 2^n — max степень 2, тогда посмотрим на $2^{n-1}-2$. Эта вершина соединена с вершинами 2^{n-1} и 2^n, но также соединена с вершиной $2^{n-1}+1$, т.к.:

$2^{n-1}-2$ имеет вид $\cancel{100\ldots001}$ $\underbrace{111\ldots110}_{n-2}$ $2^{n-1}-2 = 111\ldots01$

а $2^{n-1}+1$ имеет вид $\underbrace{100\ldots001}_{n-2}$

$\Downarrow$

$$2^{n-1}-2 \text{ xor } 2^{n-1}+1 = \underbrace{111\ldots11}_{n} \text{ или же } 2^{n-1}-2+2^{n-1}+1 =$$

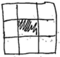
$= 2\cdot 2^{n-1}-1 = 2^n - 1$

Больше ни с какими вершинами она не соединена, а значит при всех N степенях двойки больших 8 эйлерового пути не существует.

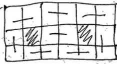
Ответ: 13; ни при каких; 2, 4, 8

+ + −

№4

1)  Есть 2 способа покрыть доминошками (когда верхнюю левую клетку покрывают горизонтальной доминошкой и когда её покрывают вертикальной). почему? ⊖

2)  Если разделить данную фигуру на два квадрата 3×3, то у нас есть 4 способа её замостить (первый квадрат 2 и на каждый из этих способов второй можно 2, поэтому $2\cdot2=4$). А теперь рассмотрим ещё 2 случая, когда доминошки выступают за квадраты 3×3.

~~Значит~~ Значит 6 вариантов.

ответ: 2; 6. ⊕

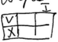
№2

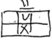
1) При $n=5$ и $k=2$ нам нужны последовательности из двух пар 01 и ещё какой-то цифры. Всего их 6: 01011, 01010, 01001, 01101, 00101, 10101

Ответ: 6 (или же $3!:2\cdot2$, у нас три элемента 01, 01 и одна цифра; кол-во способов переставить $3!$ делим на повторяющиеся 01 дважды и умножаем на кол-во значений этой цифры). ⊕

№1

1) Рассмотрим две ситуации первого хода первым игроком (первый ставит X, второй V):



и


(третий случай будет симметричен I).

На этот ход второй ответит постановкой фишки в этот же столбец).

I случае есть два дальнейших варианта:

I

V		
X	X	

II

V		
X		X

в ответ на первый случай II игрок срубит X, после чего первому останет-ся только поставить X в 3 клетку, на что II поставит V в 1 клетку и второй не сможет сходить

V		
X	V	X

в ответ на II случай II игрок поста-вит V в 3 клетки, I будет обязан поставить X во 2 клетку

V		V
X	X	X

~~вто~~ II игрок срубит X во 2 клетки и у I не будет ходов.

во II случае варианты симметричны:

	V	
X	X	

II игрок срубит, I останет-ся поставить X в 3 клетку

V	X	X

не второй ставит

~~отв~~ отв ⊕