ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2502081058520

Титульный лист

Направление ☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ политология ☐ русский язык ☐ социология ☐ физика ☐ химия ☐ филология

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Фамилия ЕЛФИМОВ

Имя ПЕТР

Отчество АРКАДЬЕВИЧ

Дата рождения 05 10 2004

Город участия ТЮМЕНЬ

Аудитория 312

Телефон 89829895758

Дата 26 02 2022 **Подпись** Елф

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2502081058520

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление

- [ ] информатика
- [ ] история
- [x] математика
- [ ] обществознание
- [ ] политология
- [ ] русский язык
- [ ] социология
- [ ] физика
- [ ] химия
- [ ] филология

Класс

- [ ] 8
- [ ] 9
- [ ] 10
- [x] 11

Заполняется организаторами

Количество доп. листов 01

Время выхода с 13:12 до 13:15

Примечание

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	20	0	0	0					
Балл члена жюри №2	20	20	0	0	0					

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Балл члена жюри №1										
Балл члена жюри №2										

Итоговый балл 40

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Задача №1

Такого быть не могло, докажем это.

Наибольшее число, которое мы можем получить сложением двух чисел от 1 до 12 — 23, наименьшее — 3, тогда рассмотрим простые числа в промежутке $[3;23]$ — это числа $3;5;7;11;13;17;19;23$.

Теперь рассмотрим число 5, стоящее в одной из вершин. ($a_1 \dots a_{11}$ — остальные числа, стоящие в вершинах)

a_{11} 5 a_1
a_{10} a_2
a_9 a_3

По условию $5+a_1$; $5+a_3$; $5+a_{11}$; $5+a_9$ — простые числа, заметим, что они все различны, ведь $a_1 \dots a_{11}$ — различные числа по условию. Вычтем из возможных простых сумм 5, чтобы найти возможные a_1; a_3; a_{11}; a_9:

$3-5=-2$; $5-5=0$; $7-5=2$; $11-5=6$; $13-5=8$; $17-5=12$; $19-5=14$; $23-5=18$.

Из этих чисел всего 4 $\in [1;12]$ — это числа: $2;6;8;12$.

Поэтому на местах a_9; a_{11}; a_1; a_3 стоят $2;6;8;12$ (не обязательно в таком порядке). ✓

Теперь рассмотрим число 11, стоящее в одной из вершин ($a_1 \dots a_{11}$ — остальные числа)

a_{11} 11 a_1
a_{10} a_2
a_9 a_3

По условию $11+a_1$; $11+a_3$; $11+a_{11}$; $11+a_9$ — простые числа, заметим, что они все различны, ведь $a_1 \dots a_{11}$ — различные по условию числа. Вычтем из возможных простых для 11, чтобы найти возможные a_1; a_3; a_{11}; a_9.

~~3-11; 2-8; 13-11~~ $3-11=-8$; $5-11=-6$; $7-11=-4$; $11-11=0$; $13-11=2$; $17-11=6$; $19-11=8$; $23-11=12$, из них всего 4 числа $\in [1;12]$ — это $2;6;8;12$.

Таким образом, мы доказали, что ~~соседние~~ набор соседних чисел и чисел через 2 вершины у 5 и 11 совпадают, докажем, что такого быть не может.

a_{11} 5 a_1
a_{10} a_2
a_9 a_3
a_8
a_7 a_4
a_6 a_5

Рассмотрим 5, стоящую в одной из вершин. По доказанному ранее a_1; ~~a_2~~ a_3; a_{11}; a_9 - это числа 9;6;8;12 (не обязательно в таком порядке)

Рассмотрим все возможные постановки числа 11 и докажем, что соседними и числами через 2 вершины никак не могут оказаться ~~a_1, a_2, a_3~~ a_1; a_3; a_{11}; a_9.

~~А~~ 11 не может быть на a_1; a_3; a_{11}; a_9, ведь там 9;6;8;12

11 не может быть на a_{10}, ведь тогда a_3 - не соседнее и не число через 2 вершины от 11.

11 не может быть на a_8, ведь тогда a_3 - не соседнее и не число за ~~2 вер~~ через 2 вершины от 11

11 не может быть на a_7 ~~a_4~~; a_6; a_5; a_4; ведь тогда a_{11} - не соседнее и не за 2 вершины от 11

11 не может быть на a_2, ведь тогда a_9 - не соседнее и не число за 2 вершины от 11.

Таким образом мы доказали, что 5 и 11 одновременно не могут стоять в вершинах, если суммы всех пар соседних чисел являются простыми и суммы всех пар чисел, между которыми стоят ровно 2 числа, тоже являются простыми. Но т.к. в вершинах все числа от 1 до 12 => быть не может, что не окажется одного из чисел 5 или 11 => такого не могло случиться.

Ответ: нет, не могло. +

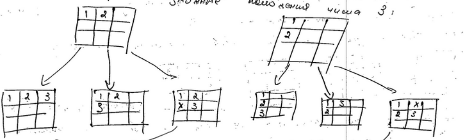
Задача №2

Заметим, что 1 и 9 всегда находятся в левом верхнем и правом нижнем углах соответственно, ведь если это не так, то в левом верхнем углу должно быть число <1, в правом нижнем число >9, чего быть не может.

1	2	
2		8
	8	9

Заметим также то, что 2 может находится лишь в 2-ух положениях, собственно как и 8, вед показанных на рисунке, ведь если это не так, то между 1 и 2 должно стоять число т.е $1<x<2$, при $x \in \mathbb{N}$ такого x нет, аналогично и с 8 и 9. $8<x<9$, $x \notin \mathbb{N}$

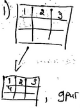
Теперь рассмотрим возможные положения числа 3:



такого быть не может, ведь $x<3, x\neq 1; x\neq 2, x \in \mathbb{N}$ $x<3; x\neq 1; x\neq 2, x \in \mathbb{N}$

Следовательно получилось 2 варианта.   Также 2 варианта.

Теперь рассмотрим расположение 4 в этих 4 вариантах.

1) , других вариантов нет, ведь при других расстановках обязано быть

число, меньшее 4, при этом не 1, не 2 и не 3.

2)

1	2	
3		

1	2	
3	4	

1	2	
3		
4		

1	2	4
3		

— 3 варианта

3)

1		
2		
3		

→

1	4	
2		
3		

— 1 вариант (Аналогично 1 варианту)

4)

1	3	
2		

— 3 варианта, аналогичные 2 варианту.

Далее будем рассматривать только 1 и 2 варианты, ведь 3 и 4 симметричны, в конце кол-во вариантов домножим на 2.

Таким образом при постановке 1, 2, 3, 4 имеется 4 варианта

1	2	3
4		

,

1	2	
3	4	

,

1	2	
3		
4		

,

1	2	4
3		

, заметим, что 5 в каждом из этих вариантов мы можем поставить 2 способами:

1	2	3
4	5	
5		

;

1	2	5
3	4	
5		

;

1	2	5
3	5	
4		

;

1	2	4
3	5	
5		

— получаем 8 вариантов.

1)

1	2	3
4	5	6
6		

;

1	2	3
4	6	
5		

⇒ 3 варианта, аналогично для

1	2	5
3	5	
4		

и

1	2	4
3	5	
5		

итого 9 вариантов

2)

1	2	5
3	4	6
6		

1	2	6
3	4	
5	6	

⇒ 4 варианта ⇒ всего 13 вариантов поставить 6.

Бланк ответов

Заметим, что если к данному моменту в таблице 3×3 заполнен прямоугольник 2×~~3~~3, то существует всего 1 вариант расположения 7, 8, 9, ведь ~~9<8<7~~ 7<8<9 => 9 в нижнем правом углу, 8 соседняя с 9, 7 соседняя с 8, но не с 9.

Тогда заметим, что при расстановке ~~6~~ 6 в 1 варианте мы могли получить всего 1 расстановку в виде прямоугольника 2×3 => в 1 случае их всего 3.

Во втором таких расстановок 2 => 5 расстановок с прямоугольником 2×3.

В варианте же, где 7 и 8 могут соседними с 9 у нас будет выходить 2 варианта – (перестановка 7 и 8 местами)

Итого из 13 вариантов 5 расстановок с од. возможными постановками 7, 8 и 9, 8 вариантов с 2 возможными постановками.

Всего вариантов 8·2+5 = 21.

Не забудем про симметричные случаи, ~~не посчитан~~ с различной постановкой 2 => всего способов 42.

Итого существует 42 способа

Ответ: 42 способа.

+

Задача №3

Заметим, что число является полуцелым, если оно $\in \mathbb{Z}$ или заканч. на 0,5.
Рассмотрим 2 случая - когда $]x[\in \mathbb{Z} \Rightarrow$ дробная часть у числа x начинается ~~что~~ на число меньшее 5. Либо же если $]x[$ заканчивается на ..., 5 (если дробная часть числа ≥ 5).

~~Заметим, что ч~~ ~~1) Пусть $]x[\in \mathbb{Z}$.~~

~~Тогда, заметим, что~~

Заметим, что при любом x, $]x[\leq x$, тогда посчитаем на каком промежутке может находиться x:

$x^2 + 2x - 6 \leq 0$ Но ведь при замене $]x[$ на x левая часть увеличится

$$x_1 x_2 = \frac{-2 \pm \sqrt{4+24}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{7}}{2} = -1 \pm \sqrt{7}$$

$+ \quad -1-\sqrt{7} \quad - \quad -1+\sqrt{7} \quad +$

$x \in [-1-\sqrt{7}; -1+\sqrt{7}]$.

Рассмотрим первый случай - когда $]x[\in \mathbb{Z}$ (дробная часть числа x начинается на число, меньшее 5)

$]x[$ всегда $< x$, поэтому т.к. $x \in [-1-\sqrt{7}; -1+\sqrt{7}]$ то $]x[$ может $\in [-3; 1]$.
проверим все значения $\quad -3 > -\sqrt{12} > -3,5$

$]x[= -3 \Rightarrow x^2 = 6+6 = 12 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{12}$, $]x[= -3 \Rightarrow x<0$; $\sqrt{12} < 3,5 \Rightarrow x = -\sqrt{12}$

$]x[= -2 \Rightarrow x^2 = 10 \Rightarrow x = \pm\sqrt{10}$, $]x[= -2 \Rightarrow x<0$ $\sqrt{10} > 2,5 \Rightarrow x \notin \mathbb{R}$

$]x[= -1 \Rightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x = \pm\sqrt{8}$, $]x[= -1$; $x<0$ $\sqrt{8} > 1,5 \Rightarrow x \notin \mathbb{R}$

$]x[= 0 \Rightarrow x^2 = 6 \Rightarrow x = \pm\sqrt{6}$ $]x[= 0$; $x>0$ $\sqrt{6} > 0,5 \Rightarrow x \notin \mathbb{R}$

$]x[= 1 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$ $]x[= 1$, $x>0$ $x=2 \Rightarrow]x[\neq 1$

Итого в 1 варианте получим один ответ: $x = -\sqrt{12}$.

Рассмотрим второй случай - когда $]x[$ оканчивается на 0,5.

~~Тогда заметим, что $2]x[$ - всегда число целое.~~

По доказанному выше $]x[\in [-3; 1]$, тогда $]x[$ может быть равно $-2,5; -1,5; -0,5; 0,5$, проверим все 4 случая.

Дополнительный лист №1

$]x[= -2.5 \Rightarrow x^2 = 6+5 = 11 \Rightarrow x = \pm\sqrt{11}$, $]x[= -2.5 \Rightarrow x < 0 \Rightarrow x = -\sqrt{11}$

$]x[= -1{,}5 \Rightarrow x^2 = 6+3 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$, $]x[= -1{,}5 \Rightarrow x < 0 \Rightarrow x = -3$

$]x[= -0{,}5 \Rightarrow x^2 = 6+1 = 7 \Rightarrow x = \pm\sqrt{7}$, $]x[= -0{,}5 \Rightarrow x < 0 \Rightarrow x = -\sqrt{7}$

$]x[= 0{,}5 \Rightarrow x^2 = 5 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5}$, $]x[= 0{,}5 \Rightarrow x > 0 \Rightarrow x = \sqrt{5}$.

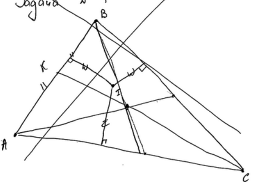
$]x[$ оканчивается на $0{,}5 \Rightarrow$ дробная часть числа x начинается на число ≥ 5.

1) $\sqrt{11} > 3 \Rightarrow\ ]x[\neq -2{,}5 \Rightarrow$ не подходит
2) $x = -3 \Rightarrow\ ]x[= -2{,}5 \neq -1{,}5 \Rightarrow$ не подходит
3) $\sqrt{7} > 2 \Rightarrow\ ]x[\neq -0{,}5 \Rightarrow$ не подходит
4) $\sqrt{5} > 1 \Rightarrow\ ]x[\neq 0{,}5 \Rightarrow$ не подходит.

Следовательно существует единственный ответ $- -\sqrt{12}$

Ответ: $x = -\sqrt{12}$.

Задача №4



Задача №4