ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2502457083544

Титульный лист

Направление	☐ информатика	☐ история	☑ математика
	☐ обществознание	☐ политология	☐ русский язык
	☐ социология	☐ физика	☐ химия
	☐ филология		
Класс	☑ 8	☐ 9	☐ 10 ☐ 11

Фамилия ВОЙТЮК

Имя АЛЕКСАНДР

Отчество ВЛАДИМИРОВИЧ

Дата рождения 01 07 2007

Город участия НОВОСИБИРСК

Аудитория N 5

Телефон +7 95 2 9 0 2 5 7 8 7

Дата 26 02 2022 **Подпись** В

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2502457083544

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление

- [ ] информатика
- [ ] история
- [x] математика
- [ ] обществознание
- [ ] политология
- [ ] русский язык
- [ ] социология
- [ ] физика
- [ ] химия
- [ ] филология

Класс

- [x] 8
- [ ] 9
- [ ] 10
- [ ] 11

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Время выхода с : до :

Примечание

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	0	20	20	20	0					
Балл члена жюри №2	0	20	20	20	0					

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Балл члена жюри №1										
Балл члена жюри №2										

Итоговый балл 60

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

№2

Пусть такое число существует. Назовём его n.
Заметим, что n не может быть чётным, поскольку в противном случае n^2 также является чётным, значит, оканчивается на чётную цифру.
Если n нечётно, то оно может делиться на 10 только с остатками 1, 3, 5, 7, 9 и может делиться на 4 только с остатками 1, 3.

n	1	3	5	7	9
n^2	1	9	5	9	1

остатки при делении n и n^2 на 10

n	1	3
n^2	1	1

остатки при делении n и n^2 на 4

Таким образом, n^2 оканчивается на 1, 5, 9 и делится на 4 с остатком 1. Число n^2 даёт такой же остаток при делении на 4, как и число, образованное двумя последними его цифрами.
Пусть предпоследняя цифра числа n^2 равна a, а последняя – b, тогда число $\overline{ab}$ делится на 4 с остатком 1 и $b = 1, 5$ или 9.
Поскольку $\overline{ab} = 10a + b$, то рассмотрим 3 случая в зависимости от значения b:

1) $b = 1$
$\overline{ab} = 10a + 1$

2) $b = 5$
$\overline{ab} = 10a + 5 = (10a + 4) + 1$

3) $b = 9$
$\overline{ab} = 10a + 9 = (10a + 8) + 1$

Т.к. числа 4 и 8 при прибавлении к числу не меняют его остатка при делении на 4, то во всех случаях $10a + 1$ даёт остаток 1 при делении на 4, откуда $10a \,\vdots\, 4$. Но $10 = 2 \cdot 5$, тогда $10a$ делится на 4 только тогда, когда $a \,\vdots\, 2$, т.е. во всех случаях у числа n^2 предпоследняя цифра чётна. Но у числа n^2 в записи нет чётных цифр, противоречие. Значит, таких чисел не существует.

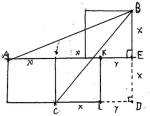
№3

Любое девятизначное число представляется в виде $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9}$, где $1 \le a_1 \le 9$, $0 \le a_{2,3,4,\dots,8,9} \le 9$.
К любой цифре данного числа, кроме a_5, можно подобрать цифру, отдалённую от a_5 на то же число разрядов. Таких пар всего 4: a_1-a_9, a_2-a_8, a_3-a_7, a_4-a_6.
Число является почти палиндромом, если ровно в 3 из 4 указанных выше пар цифры равны между собой, при этом a_5 никак не влияет на фактор палиндромности вне зависимости от значений остальных цифр.
Зафиксируем пару a_2-a_8. Пусть в этой паре цифры различаются, тогда в остальных парах они одинаковы, и $a_1=a_9$, $a_3=a_7$, $a_4=a_6$.
Цифры a_2 и a_8 могут принимать значения от 0 до 9, но они не могут быть равны, тогда различных состояний у них $100-10=90$.
Числа a_3, a_4, a_5 могут принимать значения от 0 до 9, а число a_1 – от 1 до 9, тогда вариантов выбрать эти цифры $- 9\cdot10\cdot10\cdot10 = 9\cdot10^3$, при этом числа $a_{6,7,8,9}$ однозначно определяются как равные парным им числам.
Значит, с фиксацией различающейся пары a_2-a_8 существует $90\cdot9\cdot10^3$ чисел – почти палиндромов.
Аналогично разбираются случаи с фиксациями пар a_3-a_7 и a_4-a_6, тогда эти 3 пары в сумме дают $3\cdot90\cdot9\cdot10^3 = 3\cdot81\cdot10^4$ почти палиндромов.
Пара a_1-a_9 разбирается иначе, поскольку $a_1 \neq 0$. В этом случае пара a_1-a_9 принимает 81 значение, а остальные цифры – 10^4 значений.
Значит, с этой парой получается $81\cdot10^4$ почти палиндромов, тогда всего их $3\cdot81\cdot10^4 + 81\cdot10^4 = 4\cdot81\cdot10^4 = 324\cdot10^4 = 3{,}24\cdot10^6 = 3240000$.
Ответ: 3 240 000.

+

Бланк ответов

№ 4

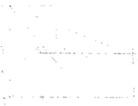


Отметим точки D, E, K, L как на рисунке. Пусть $EK = y$, стороны квадратов – x, тогда $LKED$ – прямоугольник, $DE = x$, $LD = y$.

ΔABE и ΔCDB – прямоугольные, тогда по теореме Пифагора

$AB^2 = AE^2 + BE^2 = (2x+y)^2 + x^2 = 5x^2 + y^2 + 4xy$ и $CB^2 = CD^2 + BD^2 = (x+y)^2 + (2x)^2 = 5x^2 + y^2 + 2xy$.

Значит, $AB^2 - BC^2 = 2xy$. Но $2xy > 0$, поскольку $x > 0$ и $y > 0$ (как длины отрезков), а $AB^2 - BC^2 = (AB - BC)(AB + BC)$. Выражения $AB - BC$ и $AB + BC$ имеют один знак, а поскольку $AB + BC > 0$ как сумма длин отрезков, то и $AB - BC > 0$, что равносильно $AB > BC$, что и требовалось доказать.



Бланк ответов