ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2502824232124

Титульный лист

Направление	☐ информатика	☐ история	☒ математика
	☐ обществознание	☐ политология	☐ русский язык
	☐ социология	☐ физика	☐ химия
	☐ филология		

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Фамилия АГЕЙ

Имя МИХАИЛ

Отчество АЛЕКСАНДРОВИЧ

Дата рождения 15 06 2004

Город участия БАРНАУЛ

Аудитория 304

Телефон 89609639611

Дата 26 02 2022 **Подпись**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2502824232124

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление

- [ ] информатика
- [ ] история
- [x] математика
- [ ] обществознание
- [ ] политология
- [ ] русский язык
- [ ] социология
- [ ] физика
- [ ] химия
- [ ] филология

Класс [ ] 8 [ ] 9 [ ] 10 [x] 11

Заполняется организаторами

Количество доп. листов 01

Время выхода с : до :

Примечание

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	20	10	0	0					
Балл члена жюри №2	20	20	10	0	0					

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Балл члена жюри №1										
Балл члена жюри №2										

Итоговый балл 50

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

№ 1

1) Попарные суммы (натур.) чисел от 1 до 12 $\in [3; 23]$

$\Rightarrow$ Простые числа, которые могут получиться:

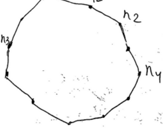
$\{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$ — 8 чисел.

Все эти простые числа нечетные $\Rightarrow$ они получаются при суммировании четного и нечетного числа. Т.к. складывают первый раз соседние числа $\Rightarrow$ соседние числа имеют разную четность $\Rightarrow$ числа по четности чередуются покругу (ч-н-ч-н...)

2) Заметим, что число 12 может суммироваться только с числами 1, 5, 7, 11 $\rightarrow$ получатся числа 13, 17, 19, 23 соответственно. А с числами 3 и 9 получатся составные числа (15 и 21 соответственно). Т.к. с числом 12 получают ровно 4 суммы, — 2 из этих чисел (1, 5, 7, 11) будут соседними числу 12, а 2 будут находиться от него с разницей в 3 места (позиции).

3) Заметим также, что число 6 может суммироваться только с числами 1, 5, 7, 11 $\rightarrow$ получатся числа: 7, 11, 13, 17 соответственно

Обозначим числа 1, 5, 7, 11 в некотором порядке за n_1, n_2, n_3, n_4.



видим, что нет такой позиции, кроме той, что занята числом 12, чтобы 6 суммировалась с числами n_1, n_2, n_3, n_4 $\Rightarrow$ такое расположение невозможно

Ответ: Нет, не могло

№3

I) Число полуцелое, если оно либо целое, либо имеет дробную часть $= 0{,}5$

Докажем, что $2 \cdot]x[= [2x]$

1) Если дробная часть $x \in [0; 0{,}5)$, то $[2x] = 2[x]$, дроб. часть $]x[$ равна $0 \Rightarrow 2]x[= 2[x]$
$\Rightarrow 2[x] = 2[x]$

2) Если дробная часть $x \in [0{,}5; 1)$, то $[2x] = 2[x]+1$, дроб. часть $]x[$ равна $0{,}5 \Rightarrow 2 \cdot]x[= 2[x]+1$
$\Rightarrow 2[x]+1 = 2[x]+1$

II) $x^2 + 2 \cdot]x[= 6$

$x^2 + [2x] = 6$, $f(x) = x^2 + [2x]$

1) $x \geq 0 \Rightarrow f(x)$ монотонно $\uparrow$, т.к. $[2x]$ неубывает, а $(x^2) \uparrow$ при $x \geq 0$ ~~$\Rightarrow$~~ при $x \geq 0$ не более 1 корня уравнения при $1 < x < 2$, но $x \to 2$: $x^2 \to 4$, но $x^2 < 4$ и $[2x] = 2$
$\Rightarrow f(x) < 6$. $1 < x^2 < 4$, $2 \leq 2]x[< 4$, решение вполне себе есть.

При $x = 2$: $x^2 = 4$, $[2x] = 4 \Rightarrow f(x) = 8 > 6$

$\Rightarrow$ при $x \geq 0$ корней у уравнения нет

2) $x \in [-1; 0) \Rightarrow x^2 \in (0; 1]$, $[2x] = -2$ $-2 \leq 2]x[< 0$
Значит равен $\{-2; -1\}$
$\Rightarrow f(x) = x^2 + [2x] \neq 6$ при $x \in [-1; 0)$

3) $x \in (-\infty; -1)$: $[2x]$ при увеличении x на $0{,}5$ увеличивается на 1, а $(x^2)' = 2x < -2$ при $x < -1 \Rightarrow$ в полуцелых значениях: чем меньше x, тем больше значение $f(x)$, иначе: $f(n) > f(n+0{,}5)$, n – полуцелое, $n \leq -1$

При $x=-3$, $f(x)=9-6=3$.
При $x=-3{,}5$, $f(x)=12{,}25-7=5{,}25<6$ $\Rightarrow$ Если корень уравнения есть, то он $\in(-4;-3{,}5)$
При $x=-4 \Rightarrow f(x)=16-8=8>6$

При $x\in(-4;-3{,}5)$ уравнение равносильно уравнению:

$x^2-8=6 \Rightarrow \begin{cases} x^2=14 \\ x<-1 \end{cases} \Rightarrow x=-\sqrt{14}$ +

Проверим: $14+2\cdot]\left(-\sqrt{14}\right)[=6$

$14-8=6$

Ответ: $-\sqrt{14}$ +

№2

индекс – $(i;j)$ – (номер столбца; номер строки) (отсчет с 1)

1) $1-(1;1)$, $9-(3;3)$, т.к. иначе 1 – не первое число в какой-либо строке/столбце, а 9 – не последнее т.к. числа в каждой строке/столбце расположены по возрастанию – это невозможно

2) 2 имеет индекс $(1;2)$ или $(2;1)$, т.к. иначе
а) если 1 и 2 в одной строке/столбце (– линии), то между ними есть какое-то число, это невозможно

б) в строке/столбце (в какой-либо) перед числом 2 идет другое число $\neq 1$, что невозможно

3) Аналогично, число 8 имеет индекс $(3;2)$ или $(2;3)$, т.к. в его линиях после него может идти только число 9 (или чисел - последнее в своей линии)

⇓

+ Имеем 4 комбинации (4 случая):

1.

1	2	
	8	9

2.

1		
2		8
		9

3.

1	2	
		8
		9

4.

1		
2		
	8	9

4) Назовем главной диагональю диагональ квадрата (большого), проходящую через $(1;1)$, $(2;2)$, $(3;3)$.

Тогда заметим, что случаи 1 и 2, как и случаи 3 и 4 симметричны относительно главной диагонали.

$\Rightarrow$ необходимо найти количество расстановок, удовлетворяющих условию для 1 и 3 случаев, а после - умножить на 2

Назовем 1 случай - случай А, 3 случай - случай Б

5) Заметим, что в любом случае число 3 должно располагаться в строке с числами 1 и 2 либо же идти после числа 1. Иначе, в какой-либо линии перед числом 3 стоит другое число, не равное 1 или 2, что невозможно.

6) Аналогично, число 7 стоит либо в линии с числами 8 и 9 либо перед числом 9, т.к. иначе после числа 7 в одной из его линий идет число меньше 7, что невозможно.

7) Тогда в случае А имеем 4 комбинации (4 случая)

1.

1	2	3
7	8	9

2.

1	2	
3		7
	8	9

3.

1	2	3
		7
	8	9

4.

1	2	
3		
7	8	9

В 1 случае 1 комбинация: 4,5,6

Во 2 - числа 4,5,6 могут располагаться в любой комбинации $\Rightarrow$ есть $3! = 6$ вар.

В 3 - (1;2) занимает только 4. Остальные 2 клетки - 5 и 6 $\Rightarrow 2! = 2$ вар.

В 4 - (3;2) - число 6, ост. - 4 и 5 $\Rightarrow 2! = 2$ вар

$\Rightarrow 2+2+6+1 = 11$ комбинаций

8) Случай Б: ~~4~~ 3 комбинации

1.

1	2	3
		8
	7	9

2.

1	2	7
3		8
		9

3.

1	2	
3		8
	7	9

~~4.~~

+В 1 комбинации – (1;2) – число 4 ⇒ 2! = 2 вар
Во 2 комб – (2;3) – число 6 ⇒ 2! = 2 вар
В 3 комб – любое расположение по 3 ячейкам чисел 4,5,6 подходит ⇒ 3! = 6 комбинации

всего 6+2+2=10 комбинаций

9) Итоговое количество расстановок (удовлетворяющих условию:

$2\cdot(10+11)=2\cdot21=42$ +

№3(продолж)

корней при $x \in (-\infty; -1)$ не больше 1.

При $x=-2 \Rightarrow f(x)=0$, $x=-3 \Rightarrow f(x)=9-6=3$, $x=-3{,}5 \Rightarrow f(x)=12{,}25-7=5{,}25$

$x=-4 \Rightarrow f(x)=16-8=8 \Rightarrow x \in (-4; -3{,}5)$

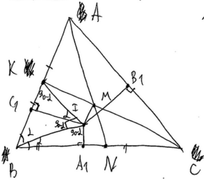
$\Rightarrow [2x]=-8$

$\Downarrow$

при $x \in (-4; -3{,}5)$ ур-е равносильно ур-ю:

$x^2-8=6 \Rightarrow x^2=14 \Rightarrow x=-\sqrt{14}$

Ответ: $-\sqrt{14}$



№4 (прошу рассмотреть)

I – инцентр. M – центр. тяжести

$\angle KIB=90°$; Д-ть: $MI \perp BC$

1) $\triangle BKI \sim \triangle BIA_1 \Rightarrow \frac{BK}{BI}=\frac{KI}{A_1I=r}=\frac{BI}{BA_1}$ +

2) $\triangle KC_1I \sim \triangle IA_1B$, ~~т.к. $\angle C_1KI=\angle A_1IB=90-\alpha$, $\angle A_1=\angle C_1=90°$, $IC_1=IA_1 \Rightarrow$~~ $\Rightarrow \frac{KI}{BI}=\frac{IC_1=r}{BA_1}=\frac{KC_1}{IA_1=r}$ | $r^2=KC_1\cdot BA_1=$

3) $\triangle BIC_1 \sim \triangle BKI \Rightarrow \frac{BI}{BK}=\frac{IC_1=r}{IK}=\frac{BC_1}{IC_1=r} \Rightarrow r^2=IK\cdot BC_1$ +

А дальше что?

$$\frac{p_i p_{i+1} - p_{i+2}^2}{p_i + p_{i+1}}$$