



Титульный лист

Направление ☐ информатика ☐ история ☒ математика
☐ обществознание ☐ политология ☐ русский язык
☐ социология ☐ физика ☐ химия
☐ филология

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☒ 10 ☐ 11

Фамилия К О П Ы Т О В

Имя Н И К И Т А

Отчество Я Д У А Р Д О В И Ч

Дата рождения 1 4 0 2 2 0 0 5

Город участия П Е Р М Ь

Аудитория 1 1 5

Телефон 8 9 9 2 2 1 5 5 3 5 3

Дата 2 6 0 2 2 0 2 2 Подпись



Пример
заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0



Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление

- | | | |
|---|--------------------------------------|--|
| ☐ информатика | ☐ история | ☒ математика |
| ☐ обществознание | ☐ политология | ☐ русский язык |
| ☐ социология | ☐ физика | ☐ химия |
| ☐ филология | | |

Класс

- | | | | |
|----------------------------|----------------------------|--|-----------------------------|
| ☐ 8 | ☐ 9 | ☒ 10 | ☐ 11 |
|----------------------------|----------------------------|--|-----------------------------|

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Время выхода с : до :

Примечание

Протокол проверки

Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	20	0	0	0					
Балл члена жюри №2	20	08	00	00	00					
Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Балл члена жюри №1										
Балл члена жюри №2										

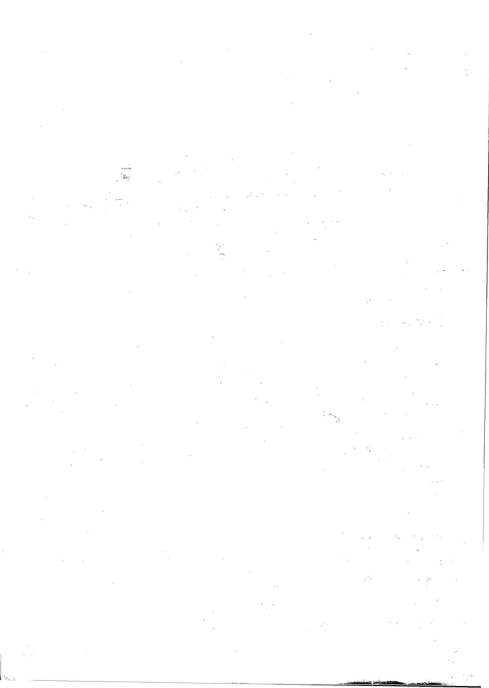
Итоговый балл 028

Подпись
члена жюри №1

Подпись
члена жюри №2

Пример
заполнения

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0



Задание 52.

$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 10 \\ \hline 5 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline \end{array}$ - девятизначное число
Возможные цифры: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9.

П.к. число имеет четное кол-во цифр, центральное число при чтении в любую сторону будет оставаться тем же. Значит при составлении почти палиндромов на 5-ую позицию можно всегда поставить любую цифру из 10 возможных.

Предположим, что изменяемая цифра стоит на позициях 6-9. Тогда на 1-ой, 2-ой, 3-ей и 4-ой местах могут стоять любые из 10 возможных цифр.

$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 10 & 10 & 10 & 10 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 10 \\ \hline 5 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline \end{array}$

Число с нуля начинаться не может $\Rightarrow$ на первом месте можно использовать лишь 9 цифр.

$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 9 & 10 & 10 & 10 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 10 \\ \hline 5 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline \end{array}$

Изменяемая цифра лишь одна и может стоять на любом из 4-х мест (6-9). П.к. изменяемая цифра должна быть отлична от той, что стоит на соответствующем месте, то изменяемая цифра может принимать 9 значений, будучи на позициях 6-9. ~~и 3 значения, занимая 3-е место~~ Остальные позиции, для которых незначительна изменяемой цифрой, должны быть заняты теми же цифрами, что и соответствующие позиции (1-4). $\Rightarrow$ возможно ~~только~~ цифра лишь одна.

Получаются варианты:

$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 9 & 10 & 10 & 10 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 10 \\ \hline 5 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline \end{array}$
 $\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 9 & 10 & 10 & 10 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 10 \\ \hline 5 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline \end{array}$
 $\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 9 & 10 & 10 & 10 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 10 \\ \hline 5 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline \end{array}$
 $\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 9 & 10 & 10 & 10 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 10 \\ \hline 5 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline \end{array}$

$$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4 = 3240000$$

вариантов при изменяемой цифре во второй половине числа.

Проведем аналогичные вычисления при извлечении цифры в первой половине числа.

Позиции 6-9 могут занимать любые из 10 цифр:

$\begin{array}{ccccccccc} \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array}$

На любой из позиций 1-4 может находиться извлекаемая цифра. На позициях 2-4 она принимает 9 различных допустимых значений. На первой позиции эта цифра может принимать 8 значений, если на 9-ой позиции стоит ноль.

На девятой позиции стоять 0 ноль не может, т.к.

в таком случае палиндром будет начинаться с нуля:

$\begin{array}{ccccccccc} \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array}$

На первой позиции допустимо лишь 8 значений, т.к. число с нуля начинаться не может и повторять 9-ую цифру нельзя.

3-ую цифру нельзя

Получаем варианты:

$\begin{array}{cccc} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{array} \quad \begin{array}{c} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{array} \quad \begin{array}{cccc} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{array} \quad \begin{array}{c} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{array}$

$$\left. \begin{array}{l} 8 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 9 + 9 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 9 \\ = 8 \cdot 10000 \cdot 9 + 9 \cdot 10000 \cdot 9 \cdot 3 \\ = 720000 + 2430000 = 3150000 \end{array} \right\}$$

Общее кол-во вариантов:

$$3150000 + 3240000 = 6390000$$

Ответ: 6390 000 почти палиндромов из девяти цифр существует.

Задача 51.

Минимальное количество знаков в кубе трехзначного числа = 7, т.к. самое маленькое такое число $100^3 = 1000000 \Rightarrow$ чтобы получить ряд из возрастающих цифр последняя цифра должна быть не менее 7.

При выведении в квадрат.

12
22
32
42
52
62
72
82
92

Бланк ответов

При возведении в куб:

$$\begin{aligned} 1^3 &= 1 \\ 2^3 &= 8 \\ 3^3 &= 27 \\ 4^3 &= 64 \\ 5^3 &= 125 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6^3 &= 216 \\ 7^3 &= 343 \\ 8^3 &= 512 \\ 9^3 &= 729 \end{aligned}$$

Могут получаться на конце цифры: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9.

Т.к. на конце число должно быть не менее 7, мы оставляем:

$$3^3 = 27$$

$$2^3 = 8$$

$$9^3 = 729$$

При возведении в квадрат минимального трехзначного числа (100) мы получаем $100^2 = 10000$ - пятизначное число. Чтобы составить последовательности возрастающих цифр последнее число должно быть не меньше 8.

При возведении в квадрат:

$$2^2 = 4$$

$$3^2 = 9$$

$$7^2 = 49$$

=> из оставшихся цифр при возведении в квадрат число, большее пяти, даст только тройка

⇓

Если такое трехзначное число существует, то оно должно оканчиваться на тройку.

Если число оканчивается на тройку, то при возведении в куб единственное пятизначное число, которое может получиться и подойти по условию - 1234567.

$$100^3 = 1000000$$

$$100^3 = 1000000$$

Допустим, что число 1234567 - куб числа x , $x \in \mathbb{N}$

$$\text{Тогда } 1000000 < 1234567 < 10000000 \Rightarrow 1000 < x < 1100$$

$$10^3 \leq x^3 \leq 10^4$$

Допустим, что 1234567 - куб натурального числа x .

$$x^3 = 1234567$$

$$109^3 = 1295029$$

$$106^3 = 1259712$$

$$107^3 = 1225043$$

$$1225043 < 1234567 < 1259712$$

$$107^3 < x^3 < 108^3, x \in \mathbb{N}$$

$\Downarrow$

+

Ответ: такого трехзначного числа не существует.

Задача 55.

Чтобы найти максимальное возможное значение выражения

$\frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{abc+1}$, надо знаменатель уменьшать, а числитель увеличивать.

$$a+b+c=1$$

$$a>0; b>0; c>0 \Rightarrow a<1; b<1; c<1$$

$$\frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{abc+1} = \frac{(ab+ba+1)(c+1)}{abc+1} = \frac{(abc+1)+bc+ac+ab+c+b+a}{abc+1} =$$

$$= 1 + \frac{bc+ac+ab+c+b+a}{abc+1} = 1 + \frac{bc+ac+ab+1}{abc+1}$$

Максимального значения выражения нет. Значение увеличивается с приближением одной из переменных к единице, а двух других к нулю.

Бланк ответов

