ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2502564018018

Титульный лист

Направление

- [ ] информатика
- [ ] история
- [x] математика
- [ ] обществознание
- [ ] политология
- [ ] русский язык
- [ ] социология
- [ ] физика
- [ ] химия
- [ ] филология

Класс [ ] 8 [ ] 9 [x] 10 [ ] 11

Фамилия НИКОЛАЕВ

Имя НИКОЛАЙ

Отчество АЛЕКСАНДРОВИЧ

Дата рождения 05 04 2005

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Аудитория 438

Телефон +79630421676

Дата 26 02 2022 **Подпись**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2502564018018

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление

- [ ] информатика
- [ ] история
- [x] математика
- [ ] обществознание
- [ ] политология
- [ ] русский язык
- [ ] социология
- [ ] физика
- [ ] химия
- [ ] филология

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☒ 10 ☐ 11

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Время выхода с : до :

Примечание

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	07	00	12	00					
Балл члена жюри №2	20	13	0	12	0					

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Балл члена жюри №1										
Балл члена жюри №2										

Итоговый балл 42

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

№ 1

Длина ~~искомо~~ куба искомого числа ≥ 7 ~~[illegible]~~

($100^3 = 1000000$), тогда последняя цифра куба $\in \{7,8,9\}$

Рассмотрим последнюю цифру кубов однозначного числа

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x^3 \underset{10}{\equiv}$	1	8	7	4	5	6	3	2	9

Тогда последняя цифра искомого числа $\in \{2;3;9\}$

Однако 2 не может быть по условию (из-за 2 передних цифр)

9^2 ~~в квадрате~~ $\underset{10}{\equiv} 1$, т.е. последняя цифра квадрата искомого числа будет в таком случае 1, что противоречит условиям (цифры по возрастанию и различны)

Тогда оставшийся вариант с 3 на конце — 123

$$\begin{array}{r} 123 \\ \times\ 123 \\ \hline 369 \\ 246 \\ 123 \\ \hline 15129 \end{array}$$

(+)

$123^2 = 15129$, что противоречит условию

Ответ: таких чисел нет.

№ 2

abcdedcba

~~Ж~~ Всего палиндромов существует $9\cdot 10^4$ (~~а [illegible]~~ а может состоять в диапазоне 1-9 (9 цифр); b c d e 0-9 (10 цифр))

Кол-во способов сделать из этого палиндрома „почти" палиндром — $(8+9+9+9)\cdot 2 + 9$ (8 вариантов замены a; 9 вариантов b c d; абсолютно такие во второй половине числа; ~~8~~ 9 вариантов для e)

не точно, последнее a можно заменить 9 способами, а не 8.

Однако меняя e, мы получаем только ~~другие~~ другие палиндромы ⇒ ~~это на~~ её изменение на кол-во „почти" палиндромов не влияет ✓

При смене abcd нужно помнить, что другие палиндромы могут иметь схожие „почти" палиндромы

g – некая цифра (это так, если „почти" палиндром не имеет вид xxxxxxxx0)

$\overline{abcdedcba}$ $\overline{abgdedgba}$ исходные палиндромы

↓ ↓

$\overline{abgdedcba}$ $\overline{abgdedcba}$ „почти" палиндромы

Таким образом, при изменении они дублируются

Тогда перемножим кол-во возможных палиндромов на кол-во возможных их преобразований с учётом e и дублирования (e на их кол-во не влияет)

исходные палиндромы – тоже „почти" палиндромы, заменив e получаем палиндром

$$\cancel{9\cdot10^4\cdot\frac{(8\cdot9+9+9)\cdot2}{2}+1=35\cdot9\cdot10^4=315\cdot10^4}$$

~~Ответ: 3150000~~

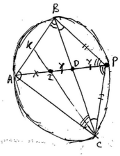
$$9\cdot10^4\cdot\left(\frac{(9+8+9+9)\cdot2}{2}+1\right)=4\cdot9^2\cdot10^4=3240000$$

верная, но неверно обоснована формула

Ответ: 3240000

+ есть верная идея подсчёта числа „почти" палиндромов, но не учтены дв... ... в решении.

№ 3



ID=DP

∠APC = ∠ABC (опираются на AC)

∠BCP = ∠BAP (опираются на BP)

∠CBP = ∠CAP (опираются на PC)

△BPC – равнобедренный

~~ACB =~~ $\angle$

$\angle ACB = \angle APB$ (опираются на AB)

$\triangle ABD \sim \triangle CDP$

$\triangle BPD \sim \triangle ADC$

$$\frac{AB}{CP} = \frac{BD}{DP} = \frac{AD}{DC}$$

$$\frac{BP}{AC} = \frac{BD}{AD} = \frac{DP}{DC}$$

Проведём бисс. CK, к-ая пересекает I (I - центр вписанной окр)

$$\frac{AI}{ID} = \frac{AC}{CD}$$

продолжения нет, из отношения фактов ход доказательства не виден.

№4

Пусть a_m, b_m - наименьший дел. m и наибольший дел. m соответственно

очевидно, что $a_m b_m = m$

Аналогично a_n, b_n

$$\begin{cases} a_m + b_m = a_n \cdot b_n \\ a_n + b_n = a_m b_m \end{cases}$$

$$a_n + b_n - a_n \cdot b_n = a_m b_m - a_m - b_m$$

Очевидно, что ~~$a \cdot b$~~ $x \cdot y > x + y$ при $x \neq 1$ и $y \neq 1$, тогда это означает, что ~~если они одно число~~ хотя бы m и n родственны только если одно из них простое

При обоих простых числах очевидно, тоже условия не выполняются (одно из них больше другого)

Без ограничения общности n - простое ✓

$a_n + b_n - a_n b_n = 1$

(b_n и есть n, $a_n = 1$)

$a_m b_m - a_m - b_m = 1$

$m = 6$

Очевидно, что при ~~больших~~ $m > 7$ условие не выполняется (~~множители меньше $\frac{m}{2}$~~) не допуст.

$m = 6 \Rightarrow n = 5$

$\pm$

~~$m=2$~~ $m = 4$ нет корней (не выполняется условие)

~~единственная пара~~

Ответ: 6; 5

+5

$$\frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{abc+1} = \frac{abc+ab+bc+ac+\overbrace{a+b+c}^{1}+1}{abc+1} =$$

$$= \frac{ab+bc+ac+1}{abc+1} + 1 = \frac{\frac{(a+b+c)^2-a^2-b^2-c^2}{2}+1}{abc+1} + 1 =$$

$$= \frac{1-a^2-b^2-c^2+2}{2(abc+1)} + 1 = \frac{3-a^2-b^2-c^2}{2(abc+1)} + 1$$

$-$

Бланк ответов