ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2502572003438

Титульный лист

Направление ☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ политология ☐ русский язык ☐ социология ☐ физика ☐ химия ☐ филология

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Фамилия МАЛОФЕЕВ

Имя МИХАИЛ

Отчество МИХАЙЛОВИЧ

Дата рождения 23 06 2004

Город участия КУРГАН

Аудитория 212

Телефон 89091712293

Дата 26 02 2022 **Подпись** [signature]

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2502572003438

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление

- [ ] информатика
- [ ] история
- [x] математика
- [ ] обществознание
- [ ] политология
- [ ] русский язык
- [ ] социология
- [ ] физика
- [ ] химия
- [ ] филология

Класс

- [ ] 8
- [ ] 9
- [ ] 10
- [x] 11

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Время выхода с : до :

Примечание

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	20	10	0	20					
Балл члена жюри №2	20	20	10	0	20					

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Балл члена жюри №1										
Балл члена жюри №2										

Итоговый балл 70

Подпись члена жюри №1

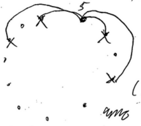
Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

№1

Посмотрим на числа 5 и 11. Заметим, что число 5 может давать простое в сумме с др. числами от 1 до 12 только с 2, 6, 8, 12. Заметим, что число 11 также может давать простое в сумме только с 2, 6, 8 и 12. Тогда поймем, что оба этих числа должны быть соседями / ~~отличны~~ между ними должно быть два места только с этими числами (т.к. у любого числа 2 соседа и 2 числа через два от него, т.е. ровно 4). Тогда расставим наши числа по кругу.



Пусть выделенное число 5 не нарушая общности. Тогда выделенные крестиками числа также должны быть соседями 11 (2 соседа и 2 через два числа). Но заметим, что нет такого числа, для которого бы это выполнялось (существуют места, у которых с выбраной ~~цифр~~ 5 три общих числа, но 4 не существует). Значит расставить их так нельзя.

+

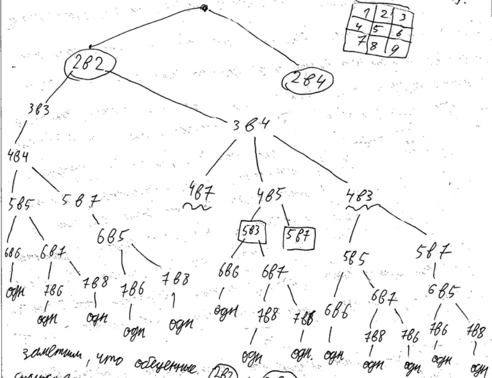
№2

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Пронумеруем все клетки в таком порядке. Поймем, что 1 стоит строго в 1, т.к. иначе оно больше какого-то числа, 9 также стоит строго в 9, т.к. как иначе оно меньше какого-то числа. Тогда рассмотрим все варианты расположения ост. цифр.

Продолжение №2.

Построим дерево всех вариантов. (если мы пишем X в y, то значит на этом шаге мы ставим число x в клетку с номером y, если одн, то дальше этот вариант определяется однозначно. Мы расставляем цифры в порядке возрастания, то есть на каждом шаге, который не однозначен мы ставим нашу цифру на все возможные места).



заметим, что обведенные 2в2 и 2в4 симметричны, значит в 2в4 столько же. 4в7 и 4в3 также симметричные шаги, как и 5в3 и 5в7. Тогда всего вариантов $2\cdot(5+2\cdot5+2\cdot3) = 2\cdot(15+6) = 42$ варианта.

+

№3

Пусть $\frac{a}{2} \le x \le \frac{a+1}{2}$, где a - целое. Рассмотрим два варианта.

1) $a \ge 0$: $x = \frac{a}{2} + y, y \ge 0$; $(\frac{a}{2}+y)^2 + a = 6$; $(\frac{a}{2}+y)^2 = 6-a$,

$6-a$ целое число. Число слева ≥ 0, т.к. оно квадрат. Тогда

если $a > 3$, то $a \ge 4$, $(\frac{a}{2}+y)^2 \ge (2+y)^2 \ge 4$, $6-a \le 2$;

Если $a < 3$, то $a \le 2$; $(\frac{a}{2}+y)^2 \le (1+y)^2 < 4$, $6-a \ge 4$;

Если $a = 3$, $(\frac{3}{2}+y)^2 = 3$; $\frac{3}{2}+y = \sqrt{3}$, $y = \sqrt{3} - \frac{3}{2}$, $x = \sqrt{3}$,

$]\sqrt{3}[= \frac{3}{2}$, $3+3=6$. ✓

2) $a \le 0$. $x = \frac{a}{2} + y$; $y \ge 0$; $(\frac{a}{2}+y)^2 + a = 6$; $(\frac{a}{2}+y)^2 = 6-a$

Правая часть ≥ 6, тогда левая $\underline{\ge \sqrt{6}^2}$?, т.е. $a \le -4$,

тогда $(\frac{a}{2}+y)^2$ должно быть ≥ 9 т.е. $\frac{a}{2} \le -\frac{5}{2}$, т.е. $a \le -5$.

Тогда $\underline{6-a \ge -11}$ 11, значит $\frac{a}{2} \le -\frac{7}{2}$, тогда $6-a \ge 13$, тогда

$\frac{a}{2} \le -\frac{8}{2}$, тогда $6-a \ge 14$, что может нам подходить, т.к.

$(-\frac{8}{2}+y)^2 \le \frac{64}{4}$, $(-\frac{8}{2}+y)^2 = 14$, $-\frac{8}{2} + y = \sqrt{14} + \frac{8}{2}$, $x = 4 - \sqrt{14}$

$\frac{49}{4}$

$]-\sqrt{14}[= -4$; $\sqrt{14}^2 + 2 \cdot (-4) = 6$; $14 - 8 = 6$; $14 = 14$.

не доказано, что левая часть больше правой

Если $a \le -4$; $a \le -\frac{9}{2}$; $\underline{(-\frac{9}{2}+y)^2 \ge (-\frac{8}{2})^2 = 16}$; $6+9=15$; Тогда единственные корни $x = \sqrt{3}$ и $x = -\sqrt{14}$. Все переходы по оценке верны, т.к. x^2 $\underline{\text{возрастает быстрее } 6 - 2]x[}$, то есть когда x^2 впервые стало больше, то оно и дальше будет больше (т.к. переход положит. и отриц. мы рассмотрели как разные случаи ~~a~~), а все случаи, когда меньше мы рассмотрели).

№5.

Заметим, что среди наших простых есть число 2. Тогда если оно стоит на 3 месте или позже, то возьмем его как p_{i+2}. Тогда $p_i \cdot p_{i+1} - p_{i+2}^2$ - нечет, т.к. 2 единственное чет. прост. число, т.е. $p_i p_{i+1}$ нечет, p_{i+2}^2 чет, тогда их разн нечет. А $p_i + p_{i+1}$ четно, т.к. они оба нечетны. Тогда числ. не делится на 2, знаменатель делится. Тогда это не нат. число. Значит 2 это либо p_1, либо p_2. Рассмотрим первую тройку. √

$$\frac{2p - p_3^2}{2+p} = \text{нат}. \quad 2p - p_3^2 < 2p+4; \quad 2p - p_3^2 = p+2; \quad p = p_3^2 + 2.$$

Если $p_3^2 \not\vdots 3$, то $p_3^2 \underset{3}{\equiv} 1$; $p \underset{3}{\equiv} 3$. Тогда ед. число простое $p = 3$.

Но тогда $p_3^2 = 1$; $p_3 = 1$ но 1 не простое. Тогда $p_3 = 3$; $p = 9+2 = 11$

Тогда если $p_2 = 2$, то $\dfrac{p_2 \cdot p_3 - p_4^2}{p_2 + p_3} = \dfrac{6 - p_4^2}{5}$, $p_4^2 = 1$, $p_4 = 1$, противоречие √

Значит $p_2 = 11$, $\dfrac{11 \cdot 3 - p_4^2}{14} = \dfrac{33 - p_4^2}{14}$, $p_4^2 = 5$, но тогда нецелое p_4, либо $p_4^2 = 19$, p_4 также нецелое. Значит это невозможно.

+

Бланк ответов