ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2502585017792

Титульный лист

Направление	☐ информатика	☐ история	☒ математика
	☐ обществознание	☐ политология	☐ русский язык
	☐ социология	☐ физика	☐ химия
	☐ филология		
Класс	☐ 8 ☐ 9	☒ 10	☐ 11

Фамилия: МАНУХИН

Имя: АЛЕКСАНДР

Отчество: АЛЕКСАНДРОВИЧ

Дата рождения: 28 09 2005

Город участия: ЕКАТЕРИНБУРГ

Аудитория: 438

Телефон: 89920133154

Дата: 26 02 2022 Подпись: Ален

Пример заполнения: А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2502585017792

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление

- [ ] информатика
- [ ] история
- [x] математика
- [ ] обществознание
- [ ] политология
- [ ] русский язык
- [ ] социология
- [ ] физика
- [ ] химия
- [ ] филология

Класс [ ] 8 [ ] 9 [x] 10 [ ] 11

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Время выхода с 13:12 до 13:14

Примечание

Протокол проверки

Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	20	15	20	0/5					
Балл члена жюри №2	20	20	15	20	0					

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Балл члена жюри №1										
Балл члена жюри №2										

Итоговый балл 75

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

Задача №1

Заметим, что в (a) нет нулей.

Пусть a – трёхзначное число с данным выполненным условием. Тогда $a \geq 100$, $a^2 \geq 10000$, $a^3 \geq 1000000$. Тогда в a^3 не меньше 7 цифр. Тогда последняя цифра не меньше 7. (в a^3)

Рассмотрим последнюю цифру числа a – b.

Рассмотрим остатки a, a^2, a^3 по модулю 10. Тогда, очевидно, это остатки b, b^2, b^3 по модулю 10 соответственно. Заметим, что по условию, $b \geq 3$, аналогично Γ_{b^2} – остаток b^2 при делении на 10 не меньше 5. (все ~~числа~~ цифры различны, последняя – наибольшая)

$\Gamma_{b^3} \geq 7$ (7 цифр хотя-бы в записи a^3)

Рассм все возможные последние цифры числа a и a^2, a^3:

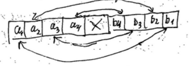
$b=$	3	4	5	6	7	8	9
$\Gamma_{b^2}=$	9	6	5	6	9	4	1
$\Gamma_{b^3}=$	7	4	5	6	3	2	9

Заметим, что для всех $b > 3$ не выполняется хотя-бы одно условие для Γ_{b^2}, Γ_{b^3}. Тогда a – только оканчивается на 3. След: $a = 123$. $a^2 = 15129$. Но для a^2 не выполнено основное условие задачи. След: такого трёхзначного числа не существует. (+)

Задача №2.

~~Было~~ В соответствии с условием, поскольку написано "стало палиндромом", будем считать, что число, являющееся палиндромом, после действия задачи оставшееся палиндромом не считается почти палиндромом.

Рассмотрим девятизначный почти палиндром.
Заметим, что ~~в~~ цифра в середине числа не влияет на принадлежность числа палиндрому или ~~почти~~ почти палиндрому. Будем рассматривать только первые и последние 4 цифры.



Разобьём ~~числа~~ цифры на пары: первое с последним (a_1 с b_1), второе с предпоследним (a_2 с b_2), a_3 с b_3, a_4 с b_4.

Тогда только в одной из пар числа различны.
Тогда пронумеруем пары: I — a_1 с b_1, II — a_2 с b_2...
Заметим, что для двух различных номеров пар различных чисел почти палиндромы будут различны. Тогда общее число почти палиндромов можно получить сложив число палиндромов для каждого номера пары различных чисел (цифр).
Очевидно, для каждого номера пары ~~чисел~~ (кроме I) но различных чисел (цифр), число почти палиндромов будет одинаково. ~~поскольку~~ (поскольку порядок пар не влияет на принадлежность числа почти палиндрому) Рассчитаем это число почти палиндромов для второй пары. Тогда число вар. выбрать цифру в 1й паре - 9 - в остальных парах по 10 кроме 2й. Число вариантов выбрать 2 различных числа с учётом порядка во второй паре: 10 · 9. Так же для каждого случая возможно любое число в середине. (10)
Тогда число почти палиндромов с II й парой

$$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 10 = 810000 = N_{II}$$

Бланк ответов

Получаем ~~ревело~~ $N_{II}+N_{III}+N_{IV}=3N_{II}=3\cdot 810000$

Рассчитаем N_I.

Число способов выбрать цифру в каждой паре, кроме I_{π} — 10, числа X — 10, число способов выбрать ~~цифру~~ a_1 — 9 $(a_1\neq 0)$, число способов выбрать b_1 — 9 (после выбора a_1). Тогда $N_I=10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot9\cdot9=810000=N_{II}$

Тогда $N=N_I+N_{II}+N_{III}+N_{IV}=4\cdot N_I=$ +

$=4\cdot 810000=3240000$

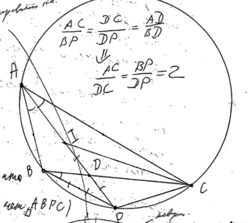
Задача № 3

правильно на.

$\frac{AC}{BP}=\frac{DC}{DP}=\frac{AD}{BD}$

$\Downarrow$

$\frac{AC}{DC}=\frac{BP}{DP}=2$



Заметим, что P — середина дуги BC. Применим лемму о трезубце. Получаем: $IP=PB=PC$. ✓

Тогда $ID/BP=\frac{1}{2}=DP/BP$. Заметим, что $\angle CBP=\angle CAP$ (впис. чет. $ABPC$) $\angle ADC=\angle BDP$. Тогда $\triangle BDP\sim\triangle ADC$. След. $\frac{AC}{DC}=\frac{BB}{DB}=\frac{1}{2}$

неверн.

Заметим, что I — на бисс $\angle ACD$. след. $AI/ID=AC/CD$ ✓

Тогда $AI / ID = \frac{2}{1} = 2$

(±) верно, но следует неверное преобразование из неверного равенства

Задача №4

Заметим, что и n и $m \geq 0$. Рассмотрим число a. ~~Рассмотрим его натуральные делители, отличные от a. Заметим, что любой натуральный делитель a — $d \leq \frac{a}{2}$, поскольку иначе частное будет либо нецелым, либо 1, что невозможно. Тогда сумма первых двух делителей числа a, отличных от a не больше $a+1$. Заметим, что~~ Рассмотрим наибольший натуральный делитель a, отличный от a и наименьший натуральный делитель a отличный от 1. Заметим, что если a - составное, то каждый из этих делителей отличен и от a и от 1, и их произведение равно a. Тогда, очевидно, сумма таких делителей $\leq a$. Если a - простое - это делители 1 и a, их сумма равна $a+1$.

Рассмотрим пару родственных чисел. Пусть $n < m$. Тогда сумма делителей n, если n - составное - не больше n, а после, что невозможно. Тогда n — простое, $m = n+1$. ✓Заметим, что m в таком случае должно быть составным, иначе $n = n+2$, что невозможно. ✓Пусть x - наибольший делитель m отличный от m, y - наименьший делитель m отличный от 1. Тогда $m \neq 1$ $y \neq m$. Следовательно (если m - нечётное, то $x+y \leq \frac{2}{3}m$, тогда $m=3$, что невозможно) $x \geq y$. Тогда $x \leq \frac{m}{2}$ ✓. Если $x < \frac{m}{2}$, тогда $y \geq \frac{m}{2}$, что невозможно, поскольку $x+y = m-1$. ✓Тогда $x = \frac{m}{2}$ ✓, $y = \frac{m}{2} - 1$ ✓. При этом $x \cdot y = m$.

$$\left(\frac{m}{2}\right)\left(\frac{m}{2}-1\right) = m$$

$$\frac{m^2}{4} - \frac{m}{2} = m$$

$$\frac{m}{4} - \frac{1}{2} = 1$$

$$\frac{m}{4} = \frac{3}{2} \quad m = 6.$$

Тогда, получаем, что n может быть только 6.

Тогда $n = 5$. Тогда парой родственных чисел может быть только пара 5 и 6. Заметим, что она является таковой парой. +

Задача №5.

Докажем, что максимальное значение выражения $\frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{abc+1}$ достигается при $a=b=c$.

Раскроем скобки: $\frac{abc+ab+bc+ac+a+b+c+1}{abc+1} =$

$$= 1 + \frac{ab+bc+ac+a+b+c}{abc+1} =$$

$$= 1 + \frac{\frac{a(b+c)}{2} + \frac{b(a+c)}{2} + \frac{c(a+b)}{2} + a+b+c}{abc+1} =$$

$$= 1 + \frac{\frac{a(1-a) + b(1-b) + c(1-c)}{2} + a+b+c}{abc+1} =$$

$$= 1 + \frac{\frac{a+b+c}{2} + \frac{-(a^2+b^2+c^2)}{2} + a+b+c}{abc+1}.$$ Пусть $a \geq b$,

из a вычтем Δx, к b прибавим Δx, $(\Delta x \leq (a-b))$

Тогда верхняя часть увеличилась на $((a-b)\Delta x - \Delta x^2)$, нижняя часть увеличилась на $((a-b)\Delta x - \Delta x^2)c$. Заметим, что значение выражения задачи увеличилось, если $\frac{1}{c} > \frac{1.5 - \frac{(a^2+b^2+c^2)}{2}}{abc+1}$ и уменьшилось, если $\frac{1}{c} <$ и не обосновано.

Тогда применим метод штурма. соответственно для третьей переменной относительно среднего арифметического. Тогда 2мя сближениями получаем, что любое выраж увел.

д-во. до конца не доведено,

ответ отсутствует

$\mp$