ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2502696034276

Титульный лист

Направление
- [ ] информатика
- [ ] история
- [x] математика
- [ ] обществознание
- [ ] политология
- [ ] русский язык
- [ ] социология
- [ ] физика
- [ ] химия
- [ ] филология

Класс [ ] 8 [ ] 9 [ ] 10 [x] 11

Фамилия ХЛОПИНА

Имя СОФЬЯ

Отчество ДМИТРИЕВНА

Дата рождения 11 05 2004

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Аудитория 621

Телефон 9222140483

Дата 26 02 2022 **Подпись**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2502696034276

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление

- ☐ информатика
- ☐ история
- ■ математика
- ☐ обществознание
- ☐ политология
- ☐ русский язык
- ☐ социология
- ☐ физика
- ☐ химия
- ☐ филология

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ■ 11

Заполняется организаторами

Количество доп. листов 1

Время выхода с : до :

Примечание

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	13	20	0	0					
Балл члена жюри №2	20	13	20	0	0					

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Балл члена жюри №1										
Балл члена жюри №2										

Итоговый балл 53

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

1.

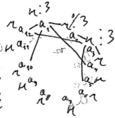
a_{12} a_1 a_2 a_{11} a_3 a_{10} a_4 a_9 a_5 a_8 a_7 a_6

Каждые 2 соседних числа должны быть разной чётности, т.к. сумма двух различных натуральных чисел будет нечётна и при этом $>2 \Rightarrow$ не будет простой. Значит, чётные и нечётные числа чередуются.

Также ни рядом, ни через 2 числа друг от друга не могут стоять числа, делящиеся на 3, т.к. сумма 2 ~~чис натур~~ натуральных чисел, которые делятся на 3, кратна 3 и при этом >3, соответственно, она не будет простой. ~~Ау~~ У нас есть 2 чётных числа делящихся на 3 (6 и 12) и 2 нечётных числа делящихся на 3 (3 и 9). Их все надо как-то расставить. Каждые 2 соседних числа разной чётности, значит, 2 числа одной чётности могут стоять друг от друга через 1 число, через 3 числа или через 5 чисел (случай, когда они стоят через 7 чисел аналогичен случаю, когда они стоят через 3 числа, т.к. они стоят в вершинах правильного двенадцатиугольника. Аналогично, случай, когда они стоят через 9 чисел, аналогичен случаю, когда они стоят через 1 число)

1 случай

~~Расставим нечётные числа~~

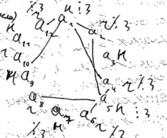


Пусть нечётные числа, кратные 3, стоят через 1 число.

Б.о.о. пусть $a_1 \vdots 3$ и $a_3 \vdots 3$. Тогда $a_2 \not\vdots 3$, $a_4 \not\vdots 3$, $a_6 \not\vdots 3$, $a_{12} \not\vdots 3$, $a_{10} \not\vdots 3$

Значит, из чётных чисел только a_8 может быть кратно 3, значит, ~~второе~~ поставить некуда второе чётное кратное 3 число. Значит, в такой ситуации условие не выполнится.

2 случай (через 3 числа)

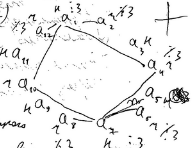


Б.о.о. $a_1 \vdots 3$, $a_5 \vdots 3$

$a_2 \not\vdots 3$, $a_4 \not\vdots 3$, $a_6 \not\vdots 3$

$a_8 \not\vdots 3$, $a_{10} \not\vdots 3$, $a_{12} \not\vdots 3$. Значит, не удастся поставить ни одно чётное число, кратное 3.

3 случай (через 5 чисел)



Б.о.о. $a_1 \vdots 3$, $a_7 \vdots 3$.

$a_2 \not\vdots 3$, $a_4 \not\vdots 3$, $a_6 \not\vdots 3$,

$a_8 \not\vdots 3$, $a_{10} \not\vdots 3$, $a_{12} \not\vdots 3$.

Тут тоже нет ни одного чётного числа, кратного 3.

Ни в одном из случаев условие не выполняется, значит, так расставить числа <u>невозможно</u>.

②

a_{11}	a_{12}	a_{13}
a_{21}	a_{22}	a_{23}
a_{31}	a_{32}	a_{33}

$a_{11} < a_{12} < a_{13}$

$a_{11} < a_{21} < a_{31}$

$a_{21} < a_{22} < a_{23}$

$\cancel{a_{21}}$ $a_{12} < a_{22} < a_{32}$

$a_{13} < a_{23} < a_{33}$

$a_{31} < a_{32} < a_{33}$

$\cancel{a_{11} < a_{12} <}$ a_{11} ~~не~~ должно быть наименьшим т.к. все остальные числа больше

($a_{11} < a_{12} < a_{22} < a_{32}$

$a_{11} < a_{21} < a_{22} < a_{23}$

$a_{11} < a_{13} < a_{23} < a_{33}$

$a_{11} < a_{31} < a_{32} < a_{33}$) $\Rightarrow a_{11} = 1$

Аналогично a_{33} – наибольшее $\Rightarrow a_{33} = 9$.

$a_{12} < a_{22} < a_{23} < a_{33}$

$a_{12} < a_{22} < a_{32}$

$a_{12} < a_{13}$

$2 \leq a_{12} \leq 4$ (т.к. a_{12} меньше минимум 5 чисел)

$2 \leq a_{21} \leq 4$ (аналогично)

$a_{22} < a_{23} < a_{33}$

$a_{22} < a_{32} < a_{33}$

$\cancel{a_{32}}$ $\cancel{a_{22}}$

$a_{11} \leq a_{12} \leq a_{22}$

$a_{11} \leq a_{21} \leq a_{22}$

$4 \leq a_{22} \leq 6$ (т.к. a_{22} меньше минимум 3 чисел и больше минимум 3 чисел)

$a_{13} < a_{23} < a_{33}$

$a_{13} > a_{12} > a_{11}$

$3 \leq a_{13} \leq 7$ (т.к. a_{13} больше минимум 2 чисел и меньше минимум 2 чисел)

$3 \leq a_{31} \leq 7$ (аналогично)

$a_{23} > a_{13} > a_{12} > a_{11}$

$a_{23} > a_{22} > a_{21}$

$6 \leq a_{23} \leq 8$ (т.к. a_{23} больше минимум 5 чисел)

$6 \leq a_{32} \leq 8$ (аналогично)

Одно из чисел a_{12} или $a_{21} = 2$, т.к. иначе никакое из чисел в этом квадрате не будет равняться 2.

Пусть $a_{12} = 2$. Тогда возможны следующие случаи.

1) $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & \\ \hline 3 & 4 & \\ \hline & & 9 \\ \hline\end{array}$
2) $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & \\ \hline 3 & 5 & \\ \hline & & 9 \\ \hline\end{array}$
3) $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & \\ \hline 3 & 6 & \\ \hline & & 9 \\ \hline\end{array}$
4) $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & \\ \hline 4 & 5 & \\ \hline & & \\ \hline\end{array}$

5) $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & \\ \hline 4 & 6 & \\ \hline & & 9 \\ \hline\end{array}$

1) $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & a_{13} \\ \hline 3 & 4 & a_{23} \\ \hline a_{31} & a_{32} & 9 \\ \hline\end{array}$ Достаточно выбрать пару чисел a_{13} и a_{23}, тогда a_{31} и a_{32} заполняются автоматически единственным образом.

Пар a_{13} и a_{23} 6: $(5,6)$, $(5,7)$, $(5,8)$, $(6,7)$, $(6,8)$, $(7,8)$. Значит, в этом случае 6 вариантов. √

2)

1	2	a_{13}
3	5	a_{23}
a_{31}	a_{32}	9

Пар a_{13} и a_{23} 6: (4, 6), (4, 7), (4, 8), (6, 7), (6, 8), (7, 8).

6 вариантов.

нельзя, $a_{23} > 6$, $a_{32} > 6$

3)

1	2	a_{13}
3	6	a_{23}
a_{31}	a_{32}	9

Пар a_{13} и a_{23} 6: (4, 5), (4, 7), (4, 8), (5, 7), (5, 8), (7, 8). 6 вариантов.

нельзя, $a_{31} > 4$

4)

1	2	a_{13}
4	5	a_{23}
a_{31}	a_{32}	9

(3, 6), (3, 7), (3, 8), (6, 7), (6, 8), (7, 8). 6 вариантов.

5)

1	2	a_{13}
4	6	a_{23}
a_{31}	a_{32}	9

(3, 5), (3, 7), (3, 8), (5, 7), (5, 8), (7, 8), 6 вариантов.

~~(3,4), (3,7), (3,8), (4,7), (4,8), (7,8).~~

Для случая, когда $a_{12} = 2$ $6 \cdot 5 = 30$ вариантов.

Для случая, когда $a_{21} = 2$ аналогично, каждый случай симметрично отражаем относительно диагонали $a_{11}-a_{33}$

~~30 + 30 = 60 вариантов~~

Ответ: $30 + 30 = 60$ вариантов

+

③ $x^2 + 2]x[= 6$.

$2]x[$ - полуцелое $\Rightarrow 2]x[$ - целое.

6 - целое $\Rightarrow$

]

$\Rightarrow x^2$ - целое.

~~Пусть x < 0,]x[> 0.~~

$x <]x[+ 0,5$, т.к. $\forall y \geq]x[+ 0,5$

$2y \geq 2]x[+ 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow]y[\geq$ ~~...~~ $]x[$

Значит, $]x[\leq x <]x[+0{,}5$

Пусть $x<0$; $]x[\geq 0$

Тогда $]x[> x$, а такое невозможно

Пусть $x>0$, $]x[\leq 0$

$]x[$ – целое $\Rightarrow 2]x[\leq -1 \Rightarrow]x[\leq -0{,}5 \Rightarrow$

$\Rightarrow]x[+0{,}5 \leq 0 \Rightarrow x \leq 0$. Противоречие.

Пусть $x \geq 0$ и $]x[\geq 0$.

Пусть $x^2 \geq 4 \Rightarrow x \geq 2$

Тогда $2]x[\leq 2$

$]x[\leq 1$

$]x[+0{,}5 \leq 1{,}5 < 2 \leq x$, что противоречит условию.

Пусть $x^2 = 3 \Rightarrow x = \sqrt{3}$

Тогда $]x[= 1{,}5$

$1{,}5 < \sqrt{3} < 2 \Rightarrow x=\sqrt{3}$ подходит.

Пусть $x^2 \leq 2 \Rightarrow x \leq \sqrt{2}$

Тогда $2]x[\geq 4$

$]x[\geq 2 > \sqrt{2} \geq x$, что противоречит условию.

Пусть $x<0$ и $]x<0$

Пусть $x^2 < 13 \Rightarrow x \geq -\sqrt{13}$

Тогда $2]x[\leq -7$

$]x[\leq -3{,}5 > -\sqrt{13}$, что противоречит условию.

$\sqrt{13} > 3$

~~$]x[+0{,}5 \leq$~~

~~$]x[$~~

Дополнительный лист № 1.

Пусть $x^2 = 14 \Rightarrow x = -\sqrt{14}$

Тогда $]x[= -4$

$-4 < -\sqrt{14} < -3,5 \Rightarrow x = -\sqrt{14}$ подходит

Пусть $x^2 \geq 15 \Rightarrow x \leq -\sqrt{15}$

Тогда $]x[= -4,5$

$-4,5 + 0,5 = -4 < -\sqrt{15}$, что противоречит условию.

+

Ответ: $x = \sqrt{3}$, $x = -\sqrt{14}$