ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2502593188913

Титульный лист

Направление	☐ информатика	☐ история	☑ математика
	☐ обществознание	☐ политология	☐ русский язык
	☐ социология	☐ физика	☐ химия
	☐ филология		
Класс	☐ 8 ☐ 9	☐ 10	☑ 11

Фамилия ЛЕБЕДЕВ

Имя ВАСИЛИЙ

Отчество СЕРГЕЕВИЧ

Дата рождения 10 11 2004

Город участия КАЛИНИНГРАД

Аудитория 1

Телефон 89217634606

Дата 26 02 2022 **Подпись**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2502593188913

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление

- [ ] информатика
- [ ] история
- [x] математика
- [ ] обществознание
- [ ] политология
- [ ] русский язык
- [ ] социология
- [ ] физика
- [ ] химия
- [ ] филология

Класс [ ] 8 [ ] 9 [ ] 10 [x] 11

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Время выхода с 11:48 до 11:50

Примечание

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	20	20	0	0					
Балл члена жюри №2	20	20	20	0	0					

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Балл члена жюри №1										
Балл члена жюри №2										

Итоговый балл 60

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Задание 1

Назовём числа a и b дружественными если либо
1). они соседние
2). между ними стоят ровно два числа

Таким образом у каждого числа ровно четыре дружественных

Лемма: у двух чисел может быть не более трёх общих дружественных чисел.

Доказательство: ~~Если у чисел a и b все дружественные числа совпадают. Тогда между ними должно быть только одно число~~

Назовём расстоянием между числами ~~[illegible]~~ наименьшее количество чисел стоящих между ними. Рассмотрим все возможные случаи

расстояние	количество общих дружественных чисел
0	0
1	3
2	0
3	2
4	0
5	2

Ч.т.д. ?

Назовём набор чисел a, b, c, d дружественных числу n ~~...~~ правильным, если $\begin{cases} a+n \\ b+n \\ c+n \\ d+n \end{cases}$ - простые. Заметим, что у чисел 11 и 5 существует единственный правильный дружественный набор, состоящий из чисел 2, 6, 8, 12. Наборы совпадают, значит что бы выполнялось условие числа 11 и 5 должны иметь четыре общих дружественных числа, что противоречит лемме.

Ответ: не могло

+

Задание 3.

$x^2+2]x[=6$, т.к. $2]x[\in\mathbb{Z}$ и $6\in\mathbb{Z}$, то

и $x^2\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{n}$, $n\in\mathbb{N}$ $\left\{\begin{array}{l}\text{подстановкой убедимся, что} \\ \text{не подходит } (0^2+2\cdot 0\neq 6)\end{array}\right.$

Пусть $f(x)=x^2+2]x[$

1\) Пусть $x=\sqrt{n}$, тогда уравнение имеет не более одного решения т.к. $f(\sqrt{n+1})>f(\sqrt{n})$ т.к. $\begin{cases}\sqrt{n+1}^2>\sqrt{n}^2 \\ ]\sqrt{n+1}[\geq]\sqrt{n}[\end{cases}$, поэтому каждое значение $f(x)$ принимает не более одного раза, при $x=\sqrt{n}$

Заметим, что $f(\sqrt{3})=6$ т.к. $2]\sqrt{3}[=3$, поскольку $1{,}6<\sqrt{3}<2$ ✓

2\) Пусть $x=-\sqrt{n}$, тогда $\begin{cases}f(x)\geq x^2+2x \\ f(x)\leq x^2+2(x-1)\end{cases}$

Пусть $g(x)=x^2+2x$. $g'(x)=2x+2 \Leftrightarrow$ при $x\leq 2$ $g(x)\downarrow$

при $x\in(-\infty;-4]$ $g(x)\geq g(4)\geq 8$ и $f(x)\geq g(x)\geq 8>6$,

поэтому на $(-\infty;-4]$ решений нет

проверим все $x=-\sqrt{n}$, $n\in[1;15]$

$f(-1)=1-2<6$

$f(-\sqrt{2})=2-2]\sqrt{2}[<2-1<6$

$f(-\sqrt{3})=3-2]\sqrt{3}[<3-1<6$

$f(-2)=4-4<6$

$f(-\sqrt{5})=5+2]-\sqrt{5}[<5-4<6$

$f(-\sqrt{6})=6+2]-\sqrt{6}[<6-4<6$

$f(-\sqrt{7})=7+2]-\sqrt{7}[<7-4<6$

$f(-\sqrt{8})=8+2]-\sqrt{8}[<8-4<6$

$f(-3) = 9 - 2 \cdot 3 < 6$

$f(-\sqrt{10}) = 10 + 2\,]-\sqrt{10}[\; < 10 - \overset{6}{\cancel{\;\;}} < 6$

$f(-\sqrt{11}) = 11 + 2\,]-\sqrt{11}[\; < 11 - 6 < 6$

$f(-\sqrt{12}) = 12 + 2\,]-\sqrt{12}[$ $\quad \begin{cases} -\sqrt{12} > \sqrt{3{,}5^2} = \sqrt{12{,}25} \\ -\sqrt{12} < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \;]-\sqrt{12}[\; = -3{,}5$

$f(-\sqrt{12}) = 12 - 7 < 6$

$f(-\sqrt{13}) = 13 + 2\,]-\sqrt{13}[$ $\quad \begin{cases} -\sqrt{13} > -4 \\ -\sqrt{13} < -3{,}5 = -\sqrt{12{,}25} \end{cases} \Leftrightarrow \;]-\sqrt{13}[\; = -4$

$f(-\sqrt{13}) = 13 - 8 < 6$

$f(-\sqrt{14}) = 14 + 2\,]-\sqrt{14}[$ $\quad \begin{cases} -\sqrt{14} > -4 \\ -\sqrt{14} < -3{,}5 = -\sqrt{12{,}25} \end{cases} \Leftrightarrow \;]-\sqrt{14}[\; = -4$

$f(-\sqrt{14}) = 14 - 2 \cdot 4 = 6$

$f(-\sqrt{15}) = 15 + 2\,]-\sqrt{15}[$ $\quad \begin{cases} -\sqrt{15} > -4 \\ -\sqrt{15} < -\sqrt{14} < -3{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \;]-\sqrt{15}[\; = -4$

$f(-\sqrt{15}) = 15 - 8 > 6$

Ответ: $\{-\sqrt{14}; \sqrt{3}\}$

Бланк ответов

№3 N2

Будем обозначать местоположение клеток через $(m;n)$, где m – строка, а n – столбец клетки. Скажем, что клетка $(m_1;n_1)$ ест клетку $(m_2;n_2)$, если $\begin{cases} m_1 \geq m_2 \\ n_1 \geq n_2 \end{cases}$. ~~Заметим~~

~~Очевидно, что клетка (m,n) ест ровно $m \cdot n$ клеток, поэтому число, стоящее в ней $\geq m \cdot n$~~

~~Аналогично, клетку $(m;n)$ едят ровно $(4-m)(4-n)$ клеток (исключая её саму), поэтому в ней должно стоять число $\leq 9-(4-m)(4-n)+1$~~

Заметим, что если число 1 стоит не в клетке $(1;1)$, то эта клетка может кого-то съесть. Противоречие. Аналогично, 9 стоит в $(3;3)$. Заметим, что 2 может стоять только в клетках $(1;2)$ или $(2;1)$, а 8 только в клетках $(3;2)$ или $(2;3)$.

В клетках $(3;2)$ и $(2;3)$ не могут стоять числа ~~больше~~ ≤ 6, а в клетках $(1,2)$ и $(2,1)$ числа >4

$\exists$ несколько случаев

1). ∃ в клетках (1;2) и (2;1) стоят 2 и 3, а в (2;3) и (3;2) 8 и 4 (в каком-то порядке) порядок даёт 4 способа. В этом случае клетки на диагонали могут быть произвольными (т.к. они не едят друг друга, при этом ~~они~~ ~~когда~~ их не едят (1;2) и (2;1) и они не едят (2;3); (3;2), кол-во способов – 3·2·1, а всего – 2·2·3·2·1 = 24

2). ∃ в (1;2) и (2;1) стоят 2 и 4, а в (2;3) и (3;2) 8 и 6. Заметим, что тогда 6 и 4 не могут стоять по одну сторону от диагонали проходящую через 1 и 9. ~~тогда~~ В противном случае, в граничащей с ними клетке будет стоять 3 или 7 (тогда условие перестанет выполняться). Поэтому положение 4 однозначно определяет положение 6 и всю таблицу. Кол-во способов = 2

3). ∃ в (1;2) и (2;1) стоят 2 и 3, а в (2;3) и (3;2) 8 и 6 или в (1;2) и (2;1) стоят 2 и 4, а в (2;3) и (3;2) 8 и 7.
~~тогда~~ в первом случае, как и во втором будет 2·2·2 = 8 вариантов (2·2 – кол-во способов расставить соседние с 1 и 9 числа, а 2 – числа по диагонали)

Всего способов $2\cdot2\cdot2\cdot3+2\cdot2\cdot2\cdot2+2=42$

Ответ: 42

+