ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2502910112923

Титульный лист

Направление	☐ информатика	☐ история	☒ математика
	☐ обществознание	☐ политология	☐ русский язык
	☐ социология	☐ физика	☐ химия
	☐ филология		

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Фамилия МИЛЮТИН

Имя СЕМЁН

Отчество ОЛЕГОВИЧ

Дата рождения 07 07 2004

Город участия КАМЕНСК-УРАЛЬСКИЙ

Аудитория 321

Телефон 89826680431

Дата 26 02 2022 **Подпись** Милу

Пример заполнения АБВГДЕЖЗИЙКЛМНОПРСТУФ
ХЦЧШЩЪЫЬЭЮЯ1234567890

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2502910112923

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление

- [ ] информатика
- [ ] история
- [x] математика
- [ ] обществознание
- [ ] политология
- [ ] русский язык
- [ ] социология
- [ ] физика
- [ ] химия
- [ ] филология

Класс [ ] 8 [ ] 9 [ ] 10 [x] 11

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Время выхода с : до :

Примечание

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	0	7	13	20	0	20				
Балл члена жюри №2	0	13	20	0	20					

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Балл члена жюри №1										
Балл члена жюри №2										

Итоговый балл 53

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

№3.

$x^2 + 2\,]x[\, = 6$

$2\,]x[\, \in \mathbb{Z}$, $6 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x^2 \in \mathbb{Z}$

$x = \pm\sqrt{m}$, $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 0$.

Найдём положительные корни (0 корнем не является)

$x = \sqrt{1} = 1$ $\quad]x[\, = \frac{1}{2}$

$1 + 1 \neq 6.$

$x = \sqrt{2}$ $\quad]x[\, = 1$

$2 + 2 \neq 6$

$x = \sqrt{3}$ $\quad]x[\, = \frac{3}{2}$

$3 + 3 = 6$ ✓

$x = \sqrt{3}$ является корнем.

$x = \sqrt{4} = 2$ $\quad]x[\, = \frac{3}{2}$

$4 + 3 = 7 \neq 6$

$x = \sqrt{5}$ $\quad]x[\, = 2$

$5 + 4 = 9$

Примечание: $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2{,}25$

$\frac{3}{2} = \sqrt{2{,}25}$

$\sqrt{2} < \sqrt{2{,}25} < \sqrt{3}$

$\left(\frac{5}{2}\right)^2 = 6{,}25$

$\left(\frac{7}{2}\right)^2 = 12{,}25$

~~Чем больше x, тем больше результат при~~ На отрезке $(0; +\infty)$ функция $f(x) = x^2 + 2\,]x[$ возрастает, поэтому корень только 1 (возрастает, т.к. с увеличением x возрастает каждое слагаемое). ✓

Найдём отрицательные корни:

$x = -\sqrt{1} = -1$ $\quad]x[\, = -\frac{3}{2}$

$1 - 3 \neq 6$

$x = -\sqrt{2}$ $\quad]x[\, = -\frac{3}{2}$

$2 - 3 \neq 6$

$x = -\sqrt{3}$ $\quad]x[\, = -2$

$3 - 4 \neq 6$

$x = -2$ $\quad]x[\, = -\frac{5}{2}$

$4 - 5 \neq 6$

$x = -\sqrt{5}$ $\quad]x[\, = -\frac{5}{2}$

$5 - 5 \neq 6$

$x = -\sqrt{6}$ $\quad 6 - 5 \neq 6$ $\quad]x[\, = -\frac{5}{2}$

$x = -\sqrt{7}$ $\quad]x[\, = -3$

$7 - 6 \neq 6$

Заметим, что на промежутке $(-\infty; 0)$ функция меняется так:

Если при $\cancel{x=\sqrt{m+1}}$ $x=-\sqrt{m+1}$ значение $]x[$ не меняется, то $f(x) = f(x_0)+1$, где $\cancel{x_0=\sqrt{m}}$ $x_0=-\sqrt{m}$

Иначе, $f(x) = f(x_0)$. √

Так, ~~функция $f(x)$ убывает на промежутке $(-\infty; 0)$.~~

значения функции $f(x)$, где $x = -\sqrt{m}$, отрицательные уменьшаются или не изменяются, когда $x \to 0^-$

Значит, корень 1 или их 2, (если ~~$x=\sqrt{\ }$~~ $x=-\sqrt{m}$ яв. корнем и $x=-\sqrt{m+1}$ меняет значение $]x[$). Найдем m.

$x = -\sqrt{13}$ $\quad m = 13 \quad]x[= -4$

$13 - 8 \neq 6$

$x = -\sqrt{14}$ $\quad m = 14 \quad]x[= -4$

$14 - 8 = 6$ ✓

$x = -\sqrt{14}$ яв. корнем

$x = -\sqrt{15}$ не меняет $]x[$, т.к. $-4 < -\sqrt{15}$. Поэтому отрицательный корень 1.

Ответ: $x = \sqrt{3}$ и $x = -\sqrt{14}$.

№5.

Не может. Док-во: Пусть p_i, p_{i+1} — любые нечётные простые числа; $p_{i+2} = 2$.

$$\frac{p_i p_{i+1} - (p_{i+2})^2}{p_i + p_{i+1}} = \frac{\text{неч.неч.} - \text{чёт}}{\text{чёт.}} = \frac{\text{неч.}}{\text{чёт.}} \notin \mathbb{N}, \text{ т.к. дробь не сократится.} \ \surd$$

Так, число 2 (единственное чётное ~~нат.~~ простое число) может стоять только на 1й и 2й позициях. Т.к. чисел бесконечно много, позиция двойки далее не будет влиять на задачу. √

Выделим группу: $p_i = 2$, $p_{i+1} = x$, $p_{i+2} = y$. По условию:

$$\frac{2x - y^2}{2+x} \text{ — нат. число.}$$

$$\frac{2x-y^2}{2+x} = \frac{(2x+4)-y^2-4}{2+x} = 2 - \boxed{\frac{y^2+4}{x+2}}$$

Чтобы получилось нат. число, нужно:

$$\left[\begin{array}{ll} \frac{y^2+4}{x+2} = 0 & y^2 = -4 \quad \varnothing \\ \frac{y^2+4}{x+2} = 1 & y^2+4 = x+2 \qquad \boxed{x = y^2+2} \ \surd \end{array}\right.$$

~~№3.~~

~~]x[— полуцелая часть чис~~

Докажем, что $\cancel{x}\ y = 3$, $\cancel{y}\ x = 11$ — единственное решение.

Если $\cancel{x}\ y$ не делится на 3:

– остаток 1: $y \bmod^* 3 = 1$ Примечание: mod — операция нахождения остатка от деления.

$y^2 \bmod 3 = 1^2 \bmod 3 = 1$

$(y^2+2) \bmod 3 = (1+2) \bmod 3 = 0$

Значит, x делится на 3. Если $x = 3$, то $y = 1 \Rightarrow y$ не простое число. Возникает противоречие. $x \neq 3 \Rightarrow x$ не простое число $\Rightarrow$ остатка 1 у y быть не может. √

– остаток 2: $y \bmod 3 = 2$

$y^2 \bmod 3 = 2^2 \bmod 3 = 1$

$(y^2+2) \bmod 3 = 0.$

Значит, остатка 2 у y быть не может.

Значит, y делится на 3. Поэтому $y = 3$, $x = 3^2 + 2 = 11$ — единственное решение.

Итак, получена тройка: 2, 11, 3. Рассмотрим следующую: 11, 3, p.

$\frac{33-p^2}{14}$. Чтобы в ответе получилось нат. число, нужно ($p^2 \geq 0$):

$$\left[\begin{array}{lll} 33-p^2=28 & p^2=5 & p=\pm\sqrt{5} \\ 33-p^2=14 & p^2=19 & p=\pm\sqrt{19} \end{array}\right.$$

Ни один из вариантов не даёт нам простого p. Поэтому такой тройки быть не может.

Значит, не может быть и прошлой тройки, являющейся единственной, содержащей число 2. Поэтому для всех натуральных i число $\frac{p_i p_{i+1} - p_{i+2}^2}{p_i + p_{i+1}}$ натуральным быть НЕ может.

Ч. т. д.

№2.

Заметим, что:

а) в левом верхнем углу ВСЕГДА находится минимум (число 1), а в правом нижнем — максимум (число 9), ~~ведь у иначе~~.

б) ~~Условия~~ В таблице:

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix} \quad \text{условия} \quad \begin{cases} a_1 < b_1 < c_1 \\ a_2 < b_2 < c_2 \\ a_3 < b_3 < c_3 \\ b_1 < b_2 < b_3 \\ a_1 < a_2 < a_3 \\ c_1 < c_2 < c_3 \end{cases} \quad \text{идентичны таблице} \quad \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{matrix}$$

Значит, исходная таблица симметрична относительно главной диагонали ($a_1 - b_2 - c_3$).

Рассмотрим минимумы и максимумы каждой клетки (кроме клеток с 1 и 9).

(2;1) (и (1;2)):

напишем 6;

1		
6	?	
7	8	9

не хватает чисел, больших 6-ти

5:

1		
5	6	?
7	8	9

не хватает

4:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

V

4 — максимум;

2 — минимум,

2:

1	4	7
2	5	8
3	6	9

V

(2;2):

7:

1		
	7	?
	8	9

недост.

6:

1	2	3
4	6	8
5	7	9

✓

3:

1	?	
2	3	
		9

недост.

4:

1	3	5
2	4	6
7	8	9

✓

4 — минимум;

6 — максимум.

(1;3) (и (3;1)):

8:

1		8
		?
		9

нед.

7:

1	4	7
2	5	8
3	6	9

✓

2:

1	!	2

нед.

3:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

✓

3 — минимум;

7 — максимум.

(2;3) (и (3;2)):

8:

1	4	7
2	5	8
3	6	9

V

5:

1	?	2
3	4	5
		9

нед.

6:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

✓

6 — минимум;

8 — максимум.

1	2-4	3-7
2-4	4-6	6-8
3-7	6-8	9

— итоговая таблица. ~~Т.к. она симметрична, рассмотрим сначала лишь её часть.~~

1	2	3
	4	6-8
		9

Пусть 4 будет в (2;2): $2^{6-2}=2^4$ $2\cdot C_4^2=12$

1	3/2	5-7
3/2	4	6-8
5-7	6-8	9

$n_1 = \cancel{1\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2} = 16$ случаев.

(т.к. есть гарант. 5 и 8)

Теперь пусть в (1;3) будет 3:

1	2	3
2	5/6	6-8
5-7	6-8	9

$n_2 = \underbrace{(2\cdot 2)}_{6\text{ по центру}} \cdot \overbrace{3\cdot 2}^{5\text{ поз.}} = 24$ $2n = 48$ (сим. (3;1))

неверно

В (1;2) и (2;1) обязательно встретится 2 => разобраны все случаи (2/3 и 2/4).

$n_0 = 48 + 16 = 64$ способа

Ответ: 64.

+