ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802436072770

Титульный лист

Направление ☒ информатика ☐ история ☐ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Фамилия КИРЯЧЕК

Имя ТИМОФЕЙ

Отчество АЛЕКСЕЕВИЧ

Дата рождения 03 05 2005

Город участия ПЕРМЬ

Аудитория 115

Телефон 89082607363

Дата 25 02 2023 **Подпись**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802436072770

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☒ информатика ☐ история ☐ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Город участия ПЕРМЬ

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

Протокол проверки

Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	00	18	07	00						
Балл члена жюри №2	00	18	07	00						

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Балл члена жюри №1										
Балл члена жюри №2										

Итоговый балл 025

Подпись члена жюри №1 Шко

Подпись члена жюри №2 Шаб

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

№2

1 Исследуем функцию $f(n) = 1 \oplus 2 \oplus 3 \oplus \ldots \oplus n$ и найдем, какие значения она принимает в зависимости от n

Рассмотрим ~~первые 13 значен~~ значения $f(n)$ при $n \in [1, 13]$

$f(1) = 1$

$f(2) = 1 \oplus 2 = 3$

$f(3) = 3 \oplus 3 = 0$

$f(4) = 0 \oplus 4 = 4$

$f(5) = 4 \oplus 5 = 100 \oplus 101 = 1$

$f(6) = 1 \oplus 6 = 001 \oplus 110 = 111 = 7$

$f(7) = 7 \oplus 7 = 0$

$f(8) = 0 \oplus 8 = 8$

$f(9) = 8 \oplus 9 = 1$

$f(10) = 1 \oplus 10 = 11$

$f(11) = 11 \oplus 11 = 0$

$f(12) = 0 \oplus 12 = 12$

$f(13) = 12 \oplus 13 = 1$

Несложно заметить, что $f(n)$ зависит от $n \bmod 4$:

$n \bmod 4 = 0: f(n) = n$

$n \bmod 4 = 1: f(n) = 1$

$n \bmod 4 = 2: f(n) = n+1$

$n \bmod 4 = 3: f(n) = 0$

Докажем, что это выполняется при любых n:

При любом n, при этом $n \bmod 4 = 0$

$f(n) = n$, $f(n+1) = n \oplus (n+1)$, n - четное $\to f(n+1) = 1$, $f(n+2) = 1 \oplus (n+2)$, $n+2$ - четное $\to f(n+2) = n+3$, $f(n+3) = (n+3) \oplus (n+3) = 0$, $f(n+4) = 0 \oplus (n+4) = n+4$ и так далее

Также заметим, что если n - четное, то $f(n)$ вернет n или $n+1$, и ~~тогда~~ в секунду, зная как он вычисляется, можно однозначно будет найти x и y.

Найдем $y \bmod 4$ в зависимости от n:

$y = xn^2 + 2022 \cdot n + 2022$

1. Если n - четное:

$xn^2 \% 4 = 0$ $(n^2 = 4(\frac{n}{2})^2 \to n^2 \vdots 4$.

$2022n + 2022 = 2022(n+1)$

$2022(n+1) \bmod 4 = 2$

$\to (xn^2 + 2022(n+1)) \bmod 4 = 2$ при любом четном n

$\to f(y) = y + 1$

Тогда можно ~~опр~~ однозначно определить y и, зная n, найти x все за 1 вопрос

10 б.

2 Если n - нечетное,

$xn^2 \bmod 4 = x \bmod 4$

$2022(n+1) \bmod 4 = 0$

$\to y \bmod 4 = x \bmod 4$

$\to$ значение $f(y)$ зависит от x, не зная его, невозможно подобрать оптимальную стратегию

Таким образом Кролику нужно сообщить ~~Алисе~~ ~~чет~~ max. четное n, тогда за 1 вопрос он сможет определить x

2. $y = \cancel{f}(x \cdot n^2 + B \cdot n + C$

~~Заметим, что при любых B и C при нечетном n $xn^2 \bmod 4 = x \bmod 4$, т.е значения $f(y)$ зависят от x и не зная его, нельзя подобрать.~~

почему?

1. Для четного ~~B~~ n рассмотрим 4 случая в зависимости от четности/нечетности B и C. n-четное $\to xn^2 \% 4 = 0$

$C \bmod 2$ \ $B \bmod 2$	0	1
0	~~$Bn^2 \bmod 4 = 0$~~ Bn - четное C - четное $\to y$ = чет + чет + чет - тоже четное $\to y$ можно определить по $f(y)$	Bn - четное C - четное $\to y$ = чет + чет + чет = четное $\to y$ можно определить по $f(y)$!
1	Bn - четное C - нечетное y = чет + чет + нечет - нечетное $\to f(y) \in \{0; 1\}$, $\to$ невозможно определить y по $f(y)$	Bn - четное C - нечетное y = чет + чет + нечет - нечетное $\to f(y) \in \{0; 1\} \to$ невозможно определить y по $f(y)$

Таким образом, при любом B и четном C Кролик может задать Алисе 1 вопрос для того, что определить x

A) 8б,

+ 2б.

№3

1. Заметим, что взаимоотношения между гостями можно представить в виде неориентированного графа, ~~где то~~ каждое ребро которого определяет пару друзей. Тогда чтобы какой-то гость не мог услышать собственную загадку, нужно что в графе не было циклов (возвращаться при этом по ребру, из которого пришел, нельзя). Тогда максимальное кол-во ребер в таком графе с n вершинами = n-1. Тогда в очень хорошем наборе может быть максимум 2n-1 пар друзей среди 2n гостей.

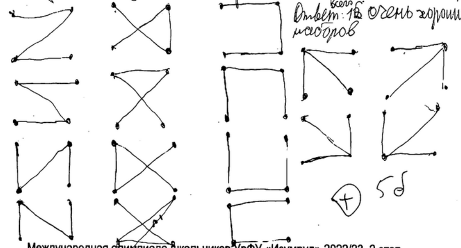
2. На семинаре пришло 4 = 2·2 гостей:

В очень хороший набор невозможно добавить пару так, чтобы он остался хорошим

→ очень хороший набор в этом случае не может состоять из 1 или 2 пар гостей (тогда всегда будет возможно добавить еще одну пару, при этом набор останется хорошим) → он должен состоять из 3 пар друзей

Найдем все возможные варианты ациклических графов с 3 ребрами

Ответ: всего 16 очень хороших наборов



+ 5б

Бланк ответов