ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802778096565

Титульный лист

Направление	☒ информатика	☐ история	☐ математика
	☐ обществознание	☐ русский язык	☐ физика
	☐ химия		

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Фамилия СКОБЕЛИН

Имя ПАВЕЛ

Отчество КОНСТАНТИНОВИЧ

Дата рождения 09 06 2005

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Аудитория 461

Телефон 89827412925

Дата 25 02 2023 **Подпись**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802778096565

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☒ информатика ☐ история ☐ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Заполняется организаторами

Количество доп. листов 02 Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	25	25	07	00						
Балл члена жюри №2	25	25	07	00						

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Балл члена жюри №1										
Балл члена жюри №2										

Итоговый балл 057

Подпись члена жюри №1 Шиг

Подпись члена жюри №2 Шаб

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

~~N1~~

~~Докажем, что таких раскрасок конечное число, при самом докажем, что~~

~~Пусть число 1 покрашено в белый цвет.~~

~~Тогда разделим~~

№1

* Я не совсем понял условие задачи, и решил ее в 2-х моих пониманиях условия.

Если в задаче нельзя складывать и умножать одну и ту же розу на себя: (т.е. имея только одну белую розу с номером 2, мы не сможем утв., что роза с номером 2·2 - белая);

Тогда таких раскрасок бесконечно,

как же они будут выглядеть?

Покрасим в ~~красный~~ белый цвет розу с номером которое явл. простым числом. Тогда произведение никаких красных не даст белое число (т.к. оно единственно и простое, => представимо в виде произв. только $x = 1 \cdot x$).

=> условие выполняется, и т.к. в раскраске присутств. все цвета. Простых чисел бесконечно => раскрасок бесконечно.

Ответ: раскрасок бесконечно.

если не можно складывать розу саму с собой.

Тогда докажем, что раскрасок конечно.

Пусть число 1 покр. в белый цвет. Тогда разобьем ряд натуральных чисел на группы: белые и красные, они будут чередоваться — подряд идущие белые и подр. идущие красные.
почему?

$\underbrace{(1\ x)}_{б}\ \underbrace{\qquad}_{к}\ \underbrace{\qquad}_{б}\ \underbrace{\qquad}_{к}\ \dots$

– ~~Пусть красных групп больше двух~~ Т

Тогда возьмем первое и посл. число из 1-й белой группы: очевидно пе. число это 1, посл. это x (x может быть $=1$)

Тогда очевидно что $x+1$ находится в след. группе;

а она красная, значит сумма 2х белых — красная.

Противоречие; $\Rightarrow$ 1 не может быть белой.

Пусть тогда 1 — красная. Тогда:

$\underbrace{(1\ \ x)}_{к}\ \underbrace{(x\ \ y)}_{б}\ \underbrace{\qquad}_{к}\ \underbrace{\qquad}_{б}\ \dots$

Пусть первая белая группа вкл. в себя числа от x до y, и $x<y$

тогда, очевидно, сложив все числа этой группы мы получим все числа от $2x$ до $2y$. ($\Rightarrow$ они белые) продолжим делать то же самое $\Rightarrow$ числа из $[4x; 4y]$ — белые, и т.д.,

$\Rightarrow$ $[2^k x; 2^k y]$ — белые.

т.к. по предп. $x<y$, то длина этого отрезка постоянно растет.

Бланк ответов

тогда возьмем такое k, чтобы правая граница $[2^k x; 2^k y]$ была хотя бы в t раз больше минимального красного (не считая 1) числа. ~~тогда найдё~~ (если такого не существует — то таких случаев конечно, ведь тогда красное число будет всего одно — 1.) Тогда возьмем макс. красное число, меньшее $2^k x$, и очевидно что произведение его и мин. красного будет входить в отрезок между ним и $2^k y$, $\Rightarrow$ будет белым. Противоречие $\Rightarrow$ в этом варианте случаев конечно.

если же $x = y$; т.е. число x — белое, $\Rightarrow$ $2x$ — белое, ~~2x+x~~ ~~3x~~ белое, $3x + x = 4x$ — белое и т.д. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ тут случаев бесконечно: возьмем произвольное простое p; покрасим в белый все числа вида np, где n — натуральное; очевидно, оно не будет представимо в виде произведения 2-х красных, ведь: $np = k_1 \cdot k_2 \cdot p = k_1 (k_2 p)$ — а все такие — белые.

т.к. простых бесконечно $\Rightarrow$ раскрасок бесконечно.

(+) 25б.

Ответ: раскрасок бесконечно.

№2.

Рассм. функцию $f(n)$. ~~[illegible]~~ Найдем эту функцию по индукции.

* $a \% b$ - ост. от деления a на b

База индукции

n	$f(n)$
0	$0 = 0$
1	$0 \wedge 1 = 1$
2	$0 \wedge 1 \wedge 2 = 3$
3	$0 \wedge 1 \wedge 2 \wedge 3 = 0$

П.И.

~~[illegible]~~

$n \% 4 == 0$ $\quad f(n) = n$

$n \% 4 == 1$ $\quad f(n) = 1$

$n \% 4 == 2$ $\quad f(n) = n+1$

$n \% 4 == 3$ $\quad f(n) = 0$

* Заметим, что

$f(n) = 1 \wedge 2 \wedge \ldots \wedge n = (1 \wedge 2 \wedge \ldots \wedge (n-1)) \wedge n = f(n-1) \wedge n$

Шаг индукции.

$n \% 4 = 0$; $f(n)$

$\Rightarrow (n-1) \% 4 = 3 \Rightarrow f(n-1) = 0$

$\Rightarrow f(n) = f(n-1) \wedge n = n \wedge 0 = n$

$n \% 4 = 1$

$\Rightarrow (n-1) \% 4 = 0$

$\Rightarrow f(n-1) = n-1$

~~$n-1$~~ рассм. двоичный вид n.

$n-1$ $\quad \ldots 00$

n $\quad \ldots 01$

очев. эти части совпадают

$\Rightarrow f(n) = 0 \wedge 1 = 1$.

$n \% 4 = 2$.

$\Rightarrow f(n) = f(n-1) \wedge n = 1 \wedge n$

$0 \wedge 1 = 1$

~~Рассм.~~ n - четное; $\Rightarrow$ последний бит - 0; $\Rightarrow n \wedge 1 = n+1$.

$n \% 4 == 3$:

$f(n) = f(n-1) \wedge n = (n-1+1) \wedge n = n \wedge n = 0$.

Значит, функция $f(n)$:

$n \equiv_4 0 \Rightarrow f(n) = n$

$n \equiv_4 1 \Rightarrow f(n) = 1$

$n \equiv_4 2 \Rightarrow f(n) = n+1$

$n \equiv_4 3 \Rightarrow f(n) = 0$.

Очевидно, что из случаев с нечетном аргументом функции ничего нельзя получить, там всегда будет 0 или 1.

1. Задам Алиса число $n=4$.

$\Rightarrow Y = xn^2 + 2022n + 2022 \equiv_4 x \cdot 0^2 + 2022 \cdot 0 + 2022 \equiv_4 2022 \equiv_4 2$.

10 б

$f(Y) = Y+1 \Rightarrow x \cdot 4^2 + 2022 \cdot 4 + 2022 + 1 = f(Y)$

(+)

отсюда однозначно находится x.

$\Rightarrow$ Кролик угадает за 1 ~~попытку~~ вопрос.

2. $Y = xn^2 + Bn + C$.

Подставим все ~~которые могут что то дать~~ по модулю 4:

$n \equiv_4 0$ ~~$n \equiv_4 2$~~.

$n \underset{4}{\equiv} 0$

$y \underset{4}{\equiv} x \cdot 0^2 + B \cdot 0 + C \underset{4}{\equiv} C$ => C должно быть ~~четным~~ четным;

$n \underset{4}{\equiv} 1$

$y \underset{4}{\equiv} x \cdot 1^2 + B \cdot 1 + C \equiv x + B + C$ - отсюда нельзя ничего понять, т.к. мы не знаем четность выражения (не знаем x)

$n \underset{4}{\equiv} 2$

$y \underset{4}{\equiv} x \cdot 2^2 + B \cdot 2 + C \underset{4}{\equiv} 2B + C$ $2B + C$ должно быть четном, чтобы найти x; => C должно быть четным.

$n \underset{4}{\equiv} 3$ $y \underset{4}{\equiv} x \cdot 3^2 + B \cdot 3 + C \equiv x + 3B + C$ - аналогично с $n \underset{4}{\equiv} 1$, ничего нельзя определить т.к.

$\Downarrow$

~~чтобы угадать x_3 S_B сколько~~

чтобы кролик смог угадать x, C должно быть четным.

(+) 15б

Дополн. лист № 1

№3

1. Пусть в нашем „графе" ~~можно~~ есть какой-то цикл. стр 1/4

Тогда рассм. его.

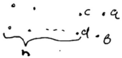
Пусть тогда кто-то из участников цикла услышал загадку и рассказал ее своим друзьям; тот своим друзьям, и т.д. Очевидно, что когда-то загадка пройдет по циклу и вернется к рассказчику. Значит ~~граф~~ хороший граф - без циклов. Очень хороший - макс. граф без циклов (с макс. ребер), т.е. дерево.

20

⇒ В дереве на $2n$ вершинах ~~[illegible]~~ ровно $2n-1$ ребер.

2, 3. Пусть посчитан ответ для $2n$ человек ~~ребер~~; т.е. известно $f(n)$.

Найдем $f(n+1)$.



~~Рассмотрим~~ Назовем пару людей ~~друзей~~, которую добавляем - a, b; последнюю пару ~~др~~ людей, которую добавляем - c, d.

Тогда a, b могут дружить только: между собой, и с ~~a~~ c и d. Рассмотрим кол-во вариантов.

Пусть для n пар людей ~~друзей~~ сущ. X хороших наборов.

~~[illegible]~~ $x=f(n)$

Тогда рассмотрим, как изменится кол-во наборов от добавления a и b.

N3

~~Тысто~~ первые 2n вершин, как я показывал ранее, образуют дерево. Мы хотим добавить 2 вершины => 2 ребра. ~~Над~~ стр 2/3

если ~~добавим ребро ab~~:

~~=> будет 4 варианта, где его по~~

рассм. все варианты.

ab

cd - это будет не дерево

ac - ok

ad - ok

bc - ok

bd - ok

ac

ad - будет не дерево

ab - было

bc - ok

bd - ok

ad

ac - не дерево

ab - было

bc - ok

bd - ok

для след. будет

Значит, ~~добавится еще~~ хотя бы 8x вариантов.

это были варианты, когда первые 2n ребер оставались деревом; но есть не варианты, когда это не так; эти варианты можно воспринимать, как:

c и d - явл. корнями деревьев

c ⇒ a

d ⇒ b

и мы подвешиваем эти деревья к a, b.

тогда, если y - кол-во вариантов таких, что бы c и d были деревьями:

если соед. a и b:

~~можем соед. a с c и d и b с и d~~

~~можем соед. a и c и~~

b и d или

Нужно подсоед. c и d к чему-то; у каждого по 2 варианта: a и b

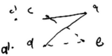
=> всего 2·2=4

Доп. листы № 2

№3

стр 3/8

и если не соединяем a и b:



или a подс. к c и d и b к c или a, или наоборот. $\Rightarrow$ еще $2\cdot(2)=4$.

$\Rightarrow 4+4=8$.

$\Rightarrow f(n+1) = 8x + 8y = 8f(n) + 8y$

y — кол-во способов, что c и d отдельные деревья.

$\Rightarrow$ кол-во ~~способов~~ таких деревьев на первых $2n$ вершинах, что <u>c и d соед. ребром.</u> Почему?

очев. оно равно: соед. c и d, и присоед. к дереву на первых $2n-2$ вершинах; там 4 варианта; (a-c' или c-d' или d-c' или d-a')

$\Rightarrow y = 4f(n-1)$

$\Rightarrow f(n+1) = 8f(n) + 8\cdot 4f(n-1)$

$\ast$ $\Rightarrow f(n) = 8f(n-1) + 32f(n-2)$ $\Rightarrow A=8$ $B=32$ $C=D=0$

для $n=1$ и $n=2$ это не работает, т.к. недостаточно ребров, посчитаем вручную:

$n=1$: очев. 1 вариант

$n=2$:

a b

c d

если a-b соед:

если c-d - соед:

4 варианта:

a-d или a-c или b-c или b-d

иначе

c-a или c-b и - 2

и

b-a или b-a - 2 $\Rightarrow 2\cdot 2=4$

иначе:

если c-d соед:

4 вар.

a-c или a-d - 2

и

b-c или b-d - 2 $2\cdot 2=4$

иначе:

4 вар:

уберем 1 любое ребро из

a-c b-d a-d b-c

$\Downarrow$

4.

Всего 16.

$\Rightarrow$ для 4 гостей ответ 16.

(4)

$\Rightarrow$ функция:

Ответ: $f(n) = 8 f(n-1) + 32 f(n-2)$

$f(1)=1$

$f(2)=16$