ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802718464151

Титульный лист

Направление	☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия
Класс	☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11
Фамилия	СЕРОВ
Имя	ИВАН
Отчество	АЛЕКСАНДРОВИЧ
Дата рождения	22 04 2005
Город участия	ЕКАТЕРИНБУРГ
Аудитория	611
Телефон	[redacted]
Дата	27 02 2023
Подпись	Серов

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802718464151

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление
☐ информатика ☐ история ☒ математика
☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика
☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	14	20	15	15	0					
Балл члена жюри №2	14	20	15	15	0					

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Балл члена жюри №1										
Балл члена жюри №2										

Итоговый балл 64

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

Вариант 1

Задание 1

$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 2021$

1. Т.к 2021 не является палиндромом, то 1 слагаемое не может быть

2. Пусть 2021 можно представить в виде суммы двух палиндромов.

Тогда одно из слагаемых точно будет почему? 4х значным числом: $\overline{xyyx}$

1) $x = 2$, тогда существует только 1 такой палиндром меньший 2021: 2002

$2021 - 2002 = 19$ ← не палиндром ✓

Все двузначные палиндромы делятся на 11 => 19 нельзя представить в виде суммы двух палиндромов.

2) $x = 1$

$2021 - \overline{1yy1}$

а) $2021 - \overline{1yy1} = \overline{(9-y)(2-y)0}$, если $y \le 2$

$\overline{(9-y)(2-y)0}$ должно быть палиндромом

=> $(9-y) = 0$, тогда это двузначное число, оканчивающееся на 0. Таких палиндромов нет

б) $2021 - \overline{1yy1} = \overline{(8-y)(12-y)0}$, если $y > 2$ ✓

Аналогичная ситуация

Значит, двух слагаемых тоже не может быть

3. Три слагаемых

$2021 = \underline{1771 + 151 + 99}$ пример

Ответ: 3

±

Вариант 1

Задание 3

$a^2; b^2; c^2; d^2$ — Арифметическая прогрессия

$\frac{1}{a+b+c}; \frac{1}{a+b+d}; \frac{1}{a+c+d}; \frac{1}{b+c+d}$ — Арифметическая прогрессия

Для того, чтобы числа образовывали арифметическую прогрессию, должны выполняться условия:

$$\begin{cases} \frac{a^2+c^2}{2} = b^2 \\ \frac{b^2+d^2}{2} = c^2 \\ \frac{\frac{1}{a+b+c}+\frac{1}{a+c+d}}{2} = \frac{1}{a+b+d} \\ \frac{\frac{1}{a+b+d}+\frac{1}{b+c+d}}{2} = \frac{1}{a+c+d} \end{cases} ; \quad \begin{cases} a^2+c^2 = 2b^2 \quad (1) \\ b^2+d^2 = 2c^2 \quad (2) \\ \frac{1}{a+b+c}+\frac{1}{a+c+d} = \frac{2}{a+d+b} \quad (3) \\ \frac{1}{a+b+d}+\frac{1}{b+c+d} = \frac{2}{a+c+d} \quad (4) \end{cases}$$

Рассмотрим условие (3)

$$\frac{1^{\,(a+c+d)}}{a+b+c}+\frac{1^{\,(a+b+c)}}{a+c+d} = \frac{2}{a+b+d}$$

$$\frac{2a+2c+d+b}{a^2+c^2+2ac+ad+ab+bc+bd+dc} = \frac{2}{a+b+d}$$

Из условия (1) можно заменить a^2+c^2 на $2b^2$

$$(2a+2c+d+b)(a+b+d) = 4b^2+4ac+2ad+2ab+2bc+2bd+2dc$$

$$2a^2+b^2+d^2+3ab+3ad+2ac+2bc+2dc+2bd = 4b^2+4ac+2ad+2ab+2bc+2bd+2dc$$

Из условия (2) можно заменить b^2+d^2 на $2c^2$,

а из условия (1) $2a^2+2c^2$ на $4b^2$

Задание 3 (продолжение)

$$4b^2+3ab+3ad+2ac+2bc+2dc+2bd=4b^2+4ac+2ad+2ab+2bc+2bd+2dc$$

$ab+ad-2ac=0$

$a(b+d-2c)=0$ $\quad a\in N \Rightarrow a\neq 0$

$\Rightarrow b+d-2c=0$

$b+d=2c$ ✓

Рассмотрим условие (4)

$$\frac{1}{a+b+d}+\frac{1}{b+c+d}=\frac{2}{a+c+d}$$

$$\frac{2b+2d+a+c}{b^2+c^2+2bd+ab+ac+ad+bc+dc}=\frac{2}{a+c+d}$$

Из условия (2) b^2+c^2 можно заменить на $2c^2$

$$2d^2+a^2+c^2+2ab+2bc+2bd+3ad+3cd+2ac=4c^2+2ab+2ac+2ad+2bc+4bd+2dc$$

Из условия (1) a^2+c^2 можно заменить на $2b^2$, а из условия (2) $2d^2+2b^2$ можно заменить на $4c^2$

$ad+cd-2bd=0$

$d(a+c-2b)=0$ $\quad$ Т.к $d\in N$, то $d\neq 0$

$\Rightarrow a+c-2b=0$

Получили новую систему

$$\begin{cases} b+d-2c=0 \\ a+c-2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b+d=2c \\ a+c=2b \end{cases} (*) \Rightarrow$$ Числа $a; b; c; d$ образуют арифметическую прогрессию.

Т.к $a^2; b^2; c^2, d^2$ тоже образуют А.П, то составим систему

Задание 3 (продолжение)

$$\begin{cases} (b-a)=(d-c) \\ (b^2-a^2)=(d^2-c^2) \end{cases} ; \begin{cases} (b-a)=(d-c) \\ (b-a)(b+a)=(d-c)(d+c) \end{cases} \Rightarrow \underline{\begin{matrix}\text{Если } b-a\neq 0 \\ b+a=d+c\end{matrix}}$$

Вернёмся к системе (*) и сложим оба уравнения
Получим:

$a+d-b-c=0$

$a+d=b+c$

$$\begin{cases} a+d=b+c \\ b+a=d+c \end{cases}$$; вычтем из первого второе

$d-b=b-d$

$2d=2b \Rightarrow d=b$ $\qquad$ $a+c=2b$

$b+d=2c$ $\qquad$ $a+b=2b$

$2b=2c \Rightarrow c=b=d$ $\qquad$ $a=b$

$\Rightarrow a=b=c=d$ $\qquad$ ЧТД

Бланк ответов

Вариант 1

Задание 4

$m+\sqrt{n+\sqrt{k}}=2023 \qquad m, n, k \in N$

Т.к $m \in N$, то $\sqrt{n+\sqrt{k}} \in N$

$\Rightarrow n+\sqrt{k}$ - полный квадрат

Т.к $m \in N \Rightarrow m \geq 1$, значит $\sqrt{n+\sqrt{k}} \leq 2022$

$n+\sqrt{k} \leq 2022^2 \qquad n+\sqrt{k} > 0$, т.к $n \in N$, $\sqrt{k}>0$

Т.к $n \in N$, то $\sqrt{k} \in N \Rightarrow k$ - полный квадрат

$\Rightarrow$ Кол-во решений уравнений будет равно кол-ву способов представить все квадраты чисел от 1 до 2022 в виде суммы двух натуральных чисел. k в этом случае будет равно квадрату одного из этих чисел, а $m = 2023-\sqrt{n+\sqrt{k}}$

Кол-во способов представить n^2 в виде суммы двух натуральных чисел равно:

1) $\left(\frac{n^2-1}{2}\right)\cdot 2 = n^2-1$, если n^2 - нечётное

2) $\left(\frac{n^2}{2}-1\right)\cdot 2+1 = n^2-1$, если n^2 - ~~не~~ чётное

Тогда всего решений уравнений:

$1^2-1+2^2-1+3^2-1+\ldots+2022^2-1 = \underbrace{1^2+2^2+3^2+\ldots+2022^2}_{\text{сумма квадратов 2022 ух первых натуральных чисел}} - 2022$ верная формула

Ответ: $1^2+2^2+3^2+\ldots+2022^2-2022$

+

Задание 5 Вариант 1

64							52
	63					53	
		62			54		
			61	55			
			56	60			
		51			59		
	50					58	
49							57

Самая худшая расстановка для Васи представлена на рисунке.

В этом случае Васе не сможет взять идущих подряд три самых больших числа.

Другие перестановки дадут уменьшение одних сумм, но при этом уже и увеличение других, которое скомпенсирует уменьшение.

Частный случай расстановки

Максимальная сумма при такой расстановке:

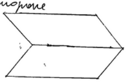
$61+55+60=176$

Вася сможет получить больше или столько же, но не меньше.

Ответ: 176

Задание 2

Пример: два параллелограмма, соединённых по большей стороне



Ответ: да

+