ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802824019024

## Титульный лист

**Направление** ☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

**Класс** ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

**Фамилия** ЛЕВИТСКАЯ

**Имя** ДИАНА

**Отчество** ЮРЬЕВНА

**Дата рождения** 08 10 2004

**Город участия** ЕКАТЕРИНБУРГ

**Аудитория** 611

**Телефон** +79506613143

**Дата** 27 02 2023 **Подпись** Левит

**Пример заполнения** А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802824019024

# Проверочный лист

## Заполняется участниками

**Направление** ☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

**Класс** ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

**Город участия** ЕКАТЕРИНБУРГ

## Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

## Протокол проверки
## Заполняется жюри

| Номер задания | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Балл члена жюри №1 | 0 | 20 | 5 | 0 | 0 | | | | | |
| Балл члена жюри №2 | 0 | 20 | 5 | 0 | 0 | | | | | |

| Номер задания | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Балл члена жюри №1 | | | | | | | | | | |
| Балл члена жюри №2 | | | | | | | | | | |

**Итоговый балл** 25

**Подпись члена жюри №1**

**Подпись члена жюри №2**

**Пример заполнения** А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

# Бланк ответов
Вариант 1

Задание 1.

Логично предположить, что минимальное количество слагаемых в сумме может быть 2. А максимальное слагаемое может иметь в записи 4 цифры

1) Пусть $\overline{abba}$ – первое слагаемое, а $\overline{cc}$ – второе.

$\overline{abba} + \overline{cc} = 2021$

$1001a + 110b + 11c = 2021$

$1001a + 11(10b + c) = 2021$

максимальное значение, которое может принимать $a$ это $2$, $a \neq 0$. Если $a = 1$:

$2021 - 1001 = 1020$, тогда следующее слагаемое должно быть кратно 10, но $11(10b+c)$ кратно 11. Получим противоречие.

Если $a = 2$:

$2021 - 2002 = 19$ – не палиндром. √

2) Пусть $\overline{abba}$ – первое слагаемое, а $\overline{cdc}$ – второе

$1001a + 101c + 10(11b + d) = 2021$ $\quad a=1, c=9$

В данной записи невозможно подобрать числа $a$ и $c$, чтобы последнее слагаемое было кратно 10

3) Рассмотрим случай, когда все слагаемые – трёхзначные числа почему бы ?

$\overline{aba} + \overline{cdc} + \overline{efe} = 2021$

$101(a+c+e) + 10(b+d+f) = 2021$

Единицу на конце числа 2021 может дать только слагаемое $101(a+c+e) = 1111$, тогда

$2021 - 1111 = 910$, число кратно 10, но сумма трёх цифр $b, d$ и $f$ не может дать $91$ $(91 > 27)$.

Тогда, чтобы в сумме получить 2021 и все слагаемые-числа – палиндромы, должно выполняться условие:

$$\begin{cases} \underbrace{a+c+e+\ldots}_{n} = 11 \\ \underbrace{b+d+f+\ldots}_{n} = 91 \end{cases}$$

при $n = 11$ данное условие выполняется $(\underset{n\,9}{99} > 91)$

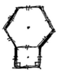
Тогда минимальное количество слагаемых – 11

Пример: $\underbrace{191 + 191 + 191 + \ldots + 191}_{10} + 111 = 2021$

Ответ: 11

Задание 2.

Ответ: Да, существует.



+

Задание 5.

Чтобы получить максимальную сумму после всех передвижений ладьи, Васе будет логично выбирать первую клетку с номером 64.

Тогда у Васи появится 14 вариантов передвижения. Нужно вычислить сумму, которую гарантированно получит Вася, тогда представим, что в этих 14 доступных клетках стоят числа от 1 до 14 (минимальный набор)

Васе разумно снова поставить ладью на клетку с максимальным числом доступным. Это 14.

После этого хода появляется ещё 7 новых вариантов хода. К минимальному набору чисел добавляем следующие 7 по порядку. Теперь максимальное число — 21.

Клетка с номером 21 — конечная точка траектории движения ладьи.

почему нельзя больше?

$64 + 14 + 21 = 99$ Максимальная сумма, которую гарантированно может получить Вася не зависимо от того, каким способом Петя заполнит таблицу

Ответ: 99

Задание 3

Т.к. числа $a^2$, $b^2$, $c^2$ и $d^2$ составляют арифметическую прогрессию, то должно выполняться условие:

$$\frac{a^2+b^2}{2} = b^2 \quad и \quad \frac{b^2+d^2}{2} = c^2$$

$$a^2+c^2 = 2b^2 \ (2) \qquad b^2+d^2 = 2c^2 \ (1)$$

Т.к. числа $\frac{1}{a+b+c}$, $\frac{1}{a+b+d}$, $\frac{1}{a+c+d}$ и $\frac{1}{b+c+d}$ составляют арифметическую прогрессию, то должно выполняться условие.

$$\frac{\frac{1}{a+b+c}+\frac{1}{a+c+d}}{2} = \frac{1}{a+b+d}$$

$$\frac{a+c+d \ + \ a+b+c}{(a+b+c)(a+c+d)} = \frac{2}{a+b+d}$$

$$(2a+2c+d+b)(a+b+d) = 2(a^2+2ac+ad+ab+bc+bd+c^2+cd)$$

$$2a^2+2ba+2d+2ac+2bc+2cd+ad+bd+d^2+ab+b^2+bd =$$
$$= 2a^2+4ac+2ad+2ab+2bc+2bd+2c^2+2cd$$
$$2b+2d+d^2+b^2 = 2ac+ab+ad+2c^2$$
$$2b+2d+2c^2 = 2ac+ab+ad+2c^2$$
$$2b+2d = a(2c+b+d)$$
$$(2-a)(b+d) = 2ac$$

$$2a^2+d^2+b^2+3ab+3ad+2ac+2bc+2dc+2bd =$$
$$= 2a^2+4ac+2ad+2ab+2bc+2bd+2c^2+2cd$$

$d^2+b^2+ab+ad = 2ac+2c^2$ Подставляем (1) и получаем

$$2c^2+a(b+d) = 2ac+2c^2$$
$$a(b+d) = 2ac$$
$$(b+d) = 2c \ \checkmark$$

Аналогично с $\frac{\frac{1}{a+b+d}+\frac{1}{b+c+d}}{2} = \frac{1}{a+c+d}$. Получаем выражение

$a^2+c^2+cd+ad = 2bd+2b^2$ Подставляем (2)

$$2b^2+cd+ad = 2bd+2b^2$$
$$d(c+a) = 2bd$$
$$(c+a) = 2b \ \checkmark$$

Подобный вариант $\begin{cases} c+a = 2b \\ b+d = 2c \end{cases}$ возможен только при $a = b = c = d$

не доказано

$\mp$

Задание 4

$m + \sqrt{n + \sqrt{k}} = 2023$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in N$, $k \in N$

Чтобы получалось целое число 2023 при $m \in N$, слагаемое $\sqrt{n+\sqrt{k}}$ тоже должно быть натуральным, а значит $n + \sqrt{k}$ — полный квадрат натурального числа больше

Всего вариантов такого слагаемого существует 44.

1 4 9 16 25 36 49 .. 1936 (44) 2025 (45) (2025 > 2023)

Число $k$ при этом тоже должно быть полным квадратом натурального числа, т.к. стоит под знаком корня

Тогда $n + \sqrt{k} \neq 1$, т.к. $n = 0$ или $k = 0$, но по условию $n \in N$ и $k \in N$

Остаётся 43 варианта слагаемого.

Для каждого из вариантов рассмотрим значения $k$ и $n$:

| Квадрат | 4 | 9 | 25 | | | 16 | | 36 | | | | 49 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | 3 | 5 | 16 | 9 | 21 | 7 | 12 | 11 | 27 | 20 | 32 | 13 | 24 | 33 | 40 | 45 | . |
| $k$ | 1 | 4 | 9 | 16 | 4 | 9 | 4 | 25 | 9 | 16 | 4 | 36 | 25 | 16 | 9 | 4 | |
| | 1 | 1 | 3 | | | 2 | | 4 | | | | 5 | | | | | |

Значения образуют арифметическую прогрессию, начиная со второго варианта, $a_1 = 1$, $d = 1$, $n = 42$.

Найдём сумму $S_{42}$:

$$S_{42} = \frac{2 \cdot a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n = \frac{2 + 41}{2} \cdot 42 = 903$$

неверно

Тогда всего количество троек натуральных чисел $m, n, k$, являющихся решением уравнения $m + \sqrt{n + \sqrt{k}} = 2023$ будет $S_{42} = 903$

Ответ: 903