ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802974355747

Титульный лист

Направление
- [ ] информатика
- [ ] история
- [x] математика
- [ ] обществознание
- [ ] русский язык
- [ ] физика
- [ ] химия

Класс [ ] 8 [ ] 9 [ ] 10 [x] 11

Фамилия СЕЛИВАНОВ

Имя СЕМЁН

Отчество МАКСИМОВИЧ

Дата рождения 26 10 2005

Город участия ЧЕЛЯБИНСК

Аудитория 349

Телефон +79049752288

Дата 27 02 2023 **Подпись**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802974355747

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ информатика ☐ история ▨ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ▨ 11

Город участия ЧЕЛЯБИНСК

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	20	20	5	0					
Балл члена жюри №2	20	20	20	17	0					

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Балл члена жюри №1										
Балл члена жюри №2										

Итоговый балл 71

Подпись члена жюри №1 **Подпись члена жюри №2**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

№3

a, b, c, d – положительные

a^2, b^2, c^2, d^2 образуют арифметическую прогрессию

$\frac{1}{a+b+c}, \frac{1}{a+b+d}, \frac{1}{a+c+d}, \frac{1}{b+c+d}$ образуют арифметическую прогрессию

Для арифметической прогрессии действует равенство:

$a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$ Применим его для наших прогрессий:

1) $b^2 = \frac{a^2+c^2}{2}$; $c^2 = \frac{b^2+d^2}{2}$ 2) $\frac{1}{a+b+d} = \frac{\frac{1}{a+b+c}+\frac{1}{a+c+d}}{2}$, $\frac{1}{a+c+d} = \frac{\frac{1}{a+b+d}+\frac{1}{b+c+d}}{2}$

$\frac{1}{a+c+d} = \frac{\frac{b+c+d+a+b+d}{(a+b+d)(b+c+d)}}{2}$ $(2a+2b+2d)(b+c+d) = (a+c+d)(2b+2d+a+c)$

$2ab+2ac+2ad+2b^2+2bc+2bd+2bd+2cd+2d^2 = 2ab+2ad+a^2+ac+2bc+2dc+ac+c^2+2bd+2d^2+ad+cd$

Из 1) $b^2 = \frac{a^2+c^2}{2}$ $2b^2+2bd = a^2+c^2+ad+cd$

$a^2+c^2+2bd = a^2+c^2+ad+cd$

$d>0$ по условию $d(2b-a-c)=0$

$2b = a+c$ $b = \frac{a+c}{2}$ ✓

$\frac{1}{a+b+d} = \frac{\frac{a+c+d+a+b+c}{(a+b+c)(a+c+d)}}{2}$ $2a^2+2ac+2ad+2ab+2bc+2bd+2ac+2c^2+2cd = 2a^2+2ab+2ad+2ac+2bc+2cd+ab+b^2+bd+ad+d^2$

Из 1) $c^2 = \frac{b^2+d^2}{2}$ $2c^2+2ac = b^2+d^2+dd+db$

$b^2+d^2+2ac = b^2+d^2+dd+db$

$d>0$ по условию $d(2c-b-d)=0$

$2c = b+d$ $c = \frac{b+d}{2}$

$b = \frac{a+c}{2}$

$b^2 = \frac{a^2+2ac+c^2}{4}$

а также $b^2 = \frac{a^2+c^2}{2}$

$\frac{a^2+2ac+c^2}{4} = \frac{a^2+c^2}{2}$

$a^2+2ac+c^2 = 2a^2+2c^2$

$a^2-2ac+c^2=0$

$(a-c)^2=0$ $a=c$

$c^2 = \frac{b^2+2bd+d^2}{4}$ Из 1) $c^2 = \frac{b^2+d^2}{2}$

аналогично

$b^2-2bd+d^2=0$

$(b-d)^2=0$

$b=d$

$a=c$
$b=c$
$b=d$ $\Rightarrow$ $a=b=c=d$

$c = \frac{b+d}{2}$ $b=d$

$\Downarrow$

$c = \frac{2b}{2} = b$

Что и требовалось доказать

№4 $m, n, k \in N$

$m + \sqrt{n+\sqrt{k}} = 2023$ т.к. $2023 \in N$ и $m, n, k \in N$

$n+\sqrt{k}$ – квадрат N числа

m, n, k могут принимать минимальное значение 1 при определенных n и k, m – неизменяемо

$m = 2023 - \sqrt{n+\sqrt{k}}$ k – также квадрат N числа

$\Rightarrow \sqrt{n+\sqrt{k}} \le 2022$

Нам нужно найти все возможные пары n и k

Число $\sqrt{k}$ мы можем двигать числом n до следующего квадрата N числа от 1 до 2022 $> \sqrt{k}$

при $\sqrt{k} = 1$ $2 \le \sqrt{n+\sqrt{k}} \le 2022$

$\sqrt{k} = 4$ $3 \le \sqrt{n+\sqrt{k}} \le 2022$

$\sqrt{k} = 9$ $4 \le \sqrt{n+\sqrt{k}} \le 2022$

$\sqrt{k} = 16$ $5 \le \sqrt{n+\sqrt{k}} \le 2022$

$\sqrt{k} = 25$ $6 \le \sqrt{n+\sqrt{k}} \le 2022$

$\sqrt{k} = 36$ $7 \le \sqrt{n+\sqrt{k}} \le 2022$

. . . . . .

$\sqrt{k}$ может изменяться от 1 до $2022^2 - 1 = 4088483$

Разницы между квадратами составляют арифметическую прогрессию, начиная с 3 с шагом в 2 (3, 5, 7, 9, 11, 13...)

Мы понимаем, что для $\sqrt{k}$ от 1 до 3 2021 вариант и для $\sqrt{k}$ от 4 до 8 2020 вариантов и т.д.

Тогда общее число вариантов выглядит так: Нет обоснования формулы

$S = 2021 \cdot 3 + 2020 \cdot 5 + \ldots + 2 \cdot 4041 + 1 \cdot 4043$

число квадратов, до которых можно дойти

кол-во чисел на определённом промежутке

S

$a_1 = 2021$ $d_a = -1$

$b_1 = 3$ $d_b = +2$

~~$S = a_1 b_1 + (a_1 + d_a)(b_1 + b_b)$~~

$S = a_1 b_1 + (a_1 + d_a)(b_1 + d_b) + \ldots + (a_1 + 2020 d_a)(b_1 + 2020 d_b)$

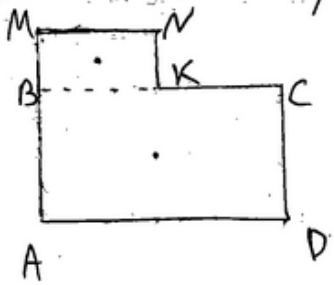
Формула, по которой можно посчитать кол-во троек

Ответ: $S = 2021 \cdot 3 + 2020 \cdot 5 + 2019 \cdot 7 + \ldots + 3 \cdot 4039 + 2 \cdot 4041 + 1 \cdot 4043$

7

№2

Многоугольник имеющий центр симметрии можно прямым разрезом разделить на 2 одинаковых ~~многоугольника~~ фигуры. Чтобы выполнить условие задачи, нужно совместить 2 многоугольника, имеющих центр симметрии так, чтобы полученную фигуру нельзя было разрезать на 2 одинаковые. Приведу пример:



ABCD – прямоугольник
MNKB – прямоугольник
Их центры симметрии – точки пересечения диагоналей. Через эти точки можно проводить любую прямую и прямоугольник будет симметричен относительно этой прямой

Возможность разрезать многоугольник на 2 одинаковые фигуры является необходимым условием для существования центра симметрии, но не достаточным. +

В данном случае оно не выполняется, а значит AMNKCD не имеет центра симметрии. А значит такой многоугольник существует

Ответ: да, существует

№1

$a_1+a_2+...+a_n=2021$

При условии, данном в задаче палиндромы могут иметь вид: $\overline{aa}$; $\overline{aaa}$; $\overline{adad}$; $\overline{dbd}$; $\overline{abba}$

2021 не является палиндромом, а значит кол-во чисел ≥ 2

Чтобы чисел было 2, одно из них точно должно быть четырёхзначным т.к. $999+999<2021$ ✓

Можем перебрать четырёхзначные палиндромы, тогда 2021 − палиндром = палиндром

палиндром	2021 − палиндром	палиндром	2021 − палиндром
2002	19	1331	690
1991	30	1221	800
1881	140	1111	910
1771	150	1001	1020
1661	360		
1551	470		
1441	580		

Мы видим, что из 2 чисел палиндромов не получится составить 2021, т.к. ни один 4-вызначный палиндром не даёт палиндром при вычитании из 2021 (<2021)

оценка

А значит кол-во чисел ≥ 3

Я могу привести пример на 3 числа: пример $22+888+1111=2021$

Следовательно, минимальное количество задач равно трём

Ответ: 3 задачи

№5

Мы можем сделать 2 хода лапы, начиная из любой клетки. Значит путь ~~ход~~ может выглядеть как прямая или буква „Г"

Продвижений нет

~~А значит кол-во чисел ≥ 3~~
~~Я могу привести пример на 3 числа: 22+888+1111=2021~~
~~Следовательно, минимальное количество задач равно 3~~
~~Ответ: 3 задачи~~