ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802137344324

Титульный лист

Направление ☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Фамилия ШУБА

Имя МАРИЯ

Отчество АЛЕКСАНДРОВНА

Дата рождения 14 07 2005

Город участия НОВОСИБИРСК

Аудитория 5

Телефон 89237540332

Дата 27 02 2023 **Подпись** Шуб-

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802137344324

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Город участия НОВОСИБИРСК

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

Протокол проверки

Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	7	–	20	5	0					
Балл члена жюри №2	7	–	20	11	0					

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Балл члена жюри №1										
Балл члена жюри №2										

Итоговый балл 35

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

Задание 3. ~~Вариант~~ Вариант 1

1) a^2, b^2, c^2, d^2 – арифметическая прогрессия, значит:

$a^2 + k = b^2$

$a^2 + 2k = c^2 \quad , k \in \mathbb{Z}$

$a^2 + 3k = d^2$

2) $\frac{1}{a+b+c}, \frac{1}{a+b+d}, \frac{1}{a+c+d}, \frac{1}{b+c+d}$ – арифм. прогрессия, значит:

$\frac{1}{a+b+c} + m = \frac{1}{a+b+d}$

$\frac{1}{a+b+c} + 2m = \frac{1}{a+c+d} \quad , m \in \mathbb{Z}$

$\frac{1}{a+b+c} + 3m = \frac{1}{b+c+d}$

Рассмотрим первое и второе уравнение

$$\begin{cases} m = \frac{1}{a+b+d} - \frac{1}{a+b+c} \\ \frac{1}{a+b+c} + 2m = \frac{1}{a+c+d} \end{cases} \to \begin{cases} m = \frac{a+b+c-a-b-d}{(a+b+d)(a+b+c)} \\ a+c+d + 2m(a+b+c)(a+c+d) = a+b+c \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} m = \frac{c-d}{(a+b+d)(a+b+c)} \\ b-d = 2m(a+b+c)(a+c+d) \end{cases} \to b-d = 2\cancel{(a+b+c)}(a+c+d) \cdot \frac{c-d}{\cancel{(a+b+c)}(a+b+d)} \to$$

$\to ab + b^2 + bd - ad - bd - d^2 = (2c-2d)(a+c+d)$

$ab - ad + a^2 + k - a^2 - 3k = (2c-2d)(a+c+d)$

$ab - ad - 2k = 2(ac + c^2 + dc - da - dc - d^2)$

$ab - ad - \cancel{2k} = 2ac + \cancel{2a^2 + 4k} - 2da - \cancel{2a^2 - 6k}$

$a(b-d) = 2a(c-d) \longrightarrow b-d = 2c-2d \to \underline{b = 2c-d}$ ✓

$a^2 + k = 4c^2 - 4cd + d^2$

$a^2 + k = -4cd + 4a^2 + 8k + a^2 + 3k$

$4cd = 4a^2 + 10k$

$cd = \frac{4a^2 - 10k}{4}$

Подставим выраженное m из первого ур-нения во ~~во~~ третье:

$$\frac{1}{a+b+c} + 3\cdot\frac{(c-d)}{(a+b+c)(a+b+d)} = \frac{1}{b+c+d} \quad \Big| \cdot (a+b+c)(a+b+d)(a+b+c+d)$$

$$(a+b+d)(b+c+d) + 3(c-d)(b+c+d) - (a+b+c)(a+b+d) = 0$$

$$(b+c+d)(a+b+d-3c-3d) - (a+b+c)(a+b+d) = 0$$

$$(b+c+d)(a+b-3c-2d) - (a^2+ab+ad+ab+b^2+bd+ac+bc+dc) = 0$$

$$ab+b^2-3bc-2db+ac+bc-3c^2-2dc+da+bd-3cd-2d^2-a^2-2ab-ad-b^2-bd-ac-bc-dc=0$$

$$-ab-3bc-2db-3c^2-6cd-2d^2-a^2=0$$

$$-ab-3bc-2db-6cd = 3c^2+2d^2+a^2$$

$$-ab-3bc-2db-6cd = 3a^2+6k+2a^2+6k+a^2 \qquad \text{но } b = 2c-d$$

$$-a(2c-d)-3c(2c-d)-2d(2c-d)-6cd = 6a^2+12k$$

$$-2ac+ad-6c^2+3cd-4dc+2d^2-6cd = 6a^2+12k$$

$$-2ac+ad-6a^2-12k-7cd+2a^2+6k-6a^2-12k=0$$

$$-2ac+ad-10a^2-18k-7cd=0, \quad \text{где } cd = \frac{10k+4a^2}{4}$$

$$a(-2c+d) = 10a^2+18k+\frac{7(4a^2+10k)}{4}$$

$$-4ab = 28a^2+88k$$

$$-ab = 7a^2+22k$$

Теперь выразим m г/з второе и третье числа арифм. прогрессии.

$$\frac{1}{a+b+d} + m = \frac{1}{a+c+d}$$

$$m = \frac{1}{a+c+d} - \frac{1}{a+b+d} \Rightarrow m = \frac{a+b+d-a-c-d}{(a+c+d)(a+b+d)} \Rightarrow m = \frac{b-c}{a^2+ab+ad+ac+bc+cd+ad+bd+d^2}$$

$$\Rightarrow m = \frac{c-d}{(a+c+d)(a+b+d)} = \frac{c-d}{(a+b+d)(a+b+c)} \quad \text{из 1 и 2 ур-нений}$$

$$\frac{c-d}{(a+b+d)(a+c+d)} = \frac{c-d}{(a+b+d)(a+b+c)}$$

$$\downarrow$$

$(c-d)(a+b+d)(a+b+c) - (c-d)(a+b+d)(a+c+d) = 0$, ~~но~~ а

$\to (c-d)(a+b+d)(a+b+c-a-c-d) = 0$

не может быть „0"

$(c-d)^2 = 0$

$c = d$, $\to b = 2d - d = d = c$, $\to \begin{cases} \cancel{a^2 + k = b^2} \\ \cancel{a^2 + 2k = c^2 = b^2} \end{cases} \to$ ~~k~~

$\to$ ~~сейчас~~ $\frac{1}{a+2b} + m = \frac{1}{a+2b}$, $m = 0$, $\to \frac{1}{a+2b} + 3 \cdot 0 = \frac{1}{3b} \to$

$a + 2b = 3b \to a = b = c = d$ ▨

Задание 4.

$n + \sqrt{n + \sqrt{k}} = 2023$

Допустим, $m = 1$ - минимальное натуральное число, тогда $\sqrt{n+\sqrt{k}} = 2022$, $\to n + \sqrt{k} = 4088484$. ~~Здесь~~

Рассмотрим минимальное значение корня. $n \geq 1$, $k \geq 1 \to$ $\to$ минимальное целое значение $\sqrt{n+\sqrt{k}} = 2$, $\to$ максимальное $m = 2021$

~~а~~ Теперь нужно поставить условие на $\sqrt{n+\sqrt{k}}$. Это должно быть целое число, $\to (n+\sqrt{k})$ должно быть целым квадратом $(4; 9; 16; 25 \dots) \to$ $(2022 - 2 + 1)$ вариантов, т.е. 2021 вариант.

Теперь поставим условия на k.

k минимальное - 1

k максимальное - значение $((n+\sqrt{k})-1)^2$, потому что n не может быть равно „0".

Как посчитано?

Вариантов всего: $\underset{4-1}{3}\cdot\underset{9-1}{8}\cdot 15\cdot 24\cdot\ldots\cdot(2022^2-1)$

$(2^2-1)(3^2-1)(4^2-1)\ldots(2022^2-1)$ они не перемножаются

$1\cdot3\cdot2\cdot4\cdot3\cdot5\cdot4\cdot6\ldots 2021\cdot2023$

$1\cdot2\cdot3^2\cdot4^2\cdot5^2\cdot6^2\ldots2021^2\cdot2023\cdot2022$

И столько же вариантов n.

Теперь учтем условие, что $m\neq n\neq k$

Допустим, $m=n=k$:

$m+\sqrt{m+\sqrt{m}}=2023$

$m+\sqrt{m}=2023^2-2023\cdot2m+m^2$

Замена: $2023=a$

$\sqrt{m}=a^2-(2a+1)m+m^2$

$m=(a^2-(2a+1)m+m^2)^2=a^4+(2a+1)^2m^2+m^4-2a^2(2a+1)+2a^2m^2-$
$-2(2a+1)m^3$

$m=a^4+(2a+1)^2m^2+2a^2m^2-2m^3(2a+1)+m^4-2a^2(2a+1)$

$m^4-2m^3(2a+1)+m^2(6a^2+4a+1)-m-2a^2(2a+1)=0$

$m^4-(4a+2)m^3+(6a^2+4a+1)m^2-m=4a^3+2a^2$ - такого не может быть

Пусть $n=k$:

$n-\sqrt{n}=a^2$, где $a\in\mathbb{Z}$

$(\sqrt{n})^2=(n-a^2)^2 \rightarrow n=n^2-2a^2n+a^4$

$n^2-(2a^2+1)+a^4=0$

$D = 4a^4 + 4a^2 + 1 - 4a^4 = 4a^2 + 1$, причём $4a^2+1$ должен быть целым числом ~~[illegible]~~, причём ещё иметь целый корень, что невозможно.

↓

Возможны только $2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2 \cdot 6^2 \cdot 7^2 \ldots 2021^2 \cdot 2022 \cdot 2023$ вариантов.

Ответ: $4090506 \cdot (3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \ldots 2021)^2$

Задание 5.

Для наглядности нарисуем случайную таблицу 8×8.

33	60	40	20	10	26	13	6
48	14	3	28	35	1	45	39
61	25	32	38	18	23	19	27
50	8	5	47	2	46	4	44
59	34	56	12	29	9	43	51
55	17	52	63	21	36	22	11
49	41	37	15	7	31	62	54
58	64	53	57	24	42	16	30

Первым числом Вася должен выбрать 64.

Дальше до любого числа можно добраться двумя способами, ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~

Допустим, от 64 по вертикали и горизонтали маленькие числа и ~~до них~~ можно ~~добраться~~ выбрать 2-мя способами (64 в углу). Тогда можно выбрать такое, чтобы прийти к 63, → макс. гарант. сумма в этом случае $(64 + 63 + 2) = 129$

т.к., допустим, до 63 можно дойти или ч/з 1, или через 2 – худший вариант)

Есть другие варианты, например, когда 64 и 63 на одной горизонтали/вертикали или рядом такие числа, что $63 + n < m + k$ и $m+k$ выбирать выгоднее, но рассмотрим вариант, когда гориз. и вертик. от 64 подобрана так, что в ней числа минимальны, т.е. от 1 до 14, → максим. гарант. – (64 + ср. арифм. от 14 чисел + ср. арифм. от оставшихся)·2 т.к. 2 варианта

$\Rightarrow 64 + (8+41)\cdot 2 = 162$

$\frac{1+\dots 14}{14} \approx 8 \cdot 2 = 16$

$\frac{15+\dots 63}{63-15+1} = \frac{15+\dots 19+45+50\cdot 4+70\cdot 4+65+90\cdot 4+85+110\cdot 4+\cancel{105+60\cdot 63}}{49}$

$= \frac{85+(50+70+90+110)\cdot 4+45+65+85+105+256}{49} = \frac{341+320\cdot 4+400}{49}$

$= \frac{741+1280}{49} \approx \frac{2021}{49} \approx 41 \cdot 2 = 82$

Максимальное гарантированное 162

Ответ: 162 Можно больше

Задание 1

Проверим, может ли быть 2 слагаемых:

Четырехзначный палиндром – 2002 – максимальный $2021-2002 = 19$ – не подходит. Числа 1...1 тоже не подходят, т.к. при разности в конце «0», $\Rightarrow$ чисел больше 2-ух. А трёхзначные числа?

$\mp$