ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802910356123

Титульный лист

Направление ☐ информатика ☐ история ■ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ■ 11

Фамилия МИНГАЗОВА

Имя ПОЛИНА

Отчество РИНАТОВНА

Дата рождения 02 12 2005

Город участия ЧЕЛЯБИНСК

Аудитория 349

Телефон 89514845699

Дата 27 02 2023 **Подпись**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802910356123

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ информатика ☐ история ■ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ■ 11

Город участия ЧЕЛЯБИНСК

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	20	20	0	0					
Балл члена жюри №2	20	20	20	0	0					

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Балл члена жюри №1										
Балл члена жюри №2										

Итоговый балл 60

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

№ 1

Справедливо, что $n > 1$ (т.к. при $n = 1$ $a_1 = 2021$ — не палиндром) наиб. 3-зн

Пусть $n = 2$, тогда хотя бы одно из чисел четырехзначное $(2021 - 999 = 1022 > 999)$ ✓

Если ~~перв~~ это число 2002, то второе $a_2 = 2021 - 2002 = 19$ — не палиндром

Если это число $1001 + 110x$, то второе $a_2 = 2021 - 1001 - 110x = (\underbrace{1020}_{\vdots 10} - \underbrace{110x}_{\vdots 10}) \vdots 10 \Rightarrow a_2 \vdots 10$, в таком случае оно не является палиндромом (т.к. число не может начинаться с нуля) **оценка**

Значит, $n \geq 3$

При $n = 3$ существует пример: $a_1 = 22$; $22 + 888 + 1111 = 2021$ **пример**

$a_2 = 888$

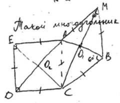
$a_3 = 1111$

+

значит, $n = 3$ — наименьшее количество задач

Ответ: 3 задачи.

№ 2



Такой многоугольник существует, например:

Справедливо, что у него нет центра симметрии

Разрезая по линии AC, мы получим ромб $AMBC$ с острым углом 60° ~~равносторонний треугольник ABC~~ и квадрат $ACDE$ — ~~правильные многоугольники, у которых существуют центры симметрии (точка пересечения~~. Их центры симметрии — точки пересечения диагоналей (O_1 и O_2 соответственно)

+

Ответ: существует

№ 3

Пусть x_i ; x_{i+1} ; x_{i+2} — члены арифметической прогрессии. Доказем, что $x_{i+1} = \frac{x_i + x_{i+2}}{2}$ (*)

$$\frac{x_i + x_{i+2}}{2} = \frac{x_1 + (i-1)t + x_1 + (i+2-1)t}{2} = \frac{2x_1 + 2it}{2} = x_1 + it = x_{i+1}$$

$\frac{1}{a+b+c}$, $\frac{1}{a+b+d}$, $\frac{1}{a+c+d}$, $\frac{1}{b+c+d}$ — члены арифметической прогрессии.

Рассмотрим первые три члена, используя (*):

$$\frac{1}{a+b+d} = \frac{\frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{a+c+d}}{2}$$

$$\frac{2}{a+b+d} = \frac{a+c+d+a+b+\cancel{d}c}{(a+b+c)(a+c+d)}$$

продолжение на обороте ⟹

№ 3 (продолжение)

$$\frac{2}{a+b+d} = \frac{2a+b+2c+d}{a^2+ac+ad+ab+bc+bd+ac+c^2+cd}$$

$$\cancel{2a^2}+\cancel{2ac}+\cancel{2ad}+\cancel{2ab}+\cancel{2bc}+\cancel{2bd}+2ac+2c^2+\cancel{2cd} = \cancel{2a^2}+\cancel{2ab}+\cancel{2ad}+ab+b^2+\cancel{bd}+\cancel{2ac}+\cancel{2bc}+\cancel{2cd}+ad+\cancel{bd}+d^2$$

$2ac+2c^2 = ab+b^2+ad+d^2$

По условию a^2, b^2, c^2, d^2 - члены арифметической прогрессии $\overset{(*)}{\Rightarrow} c^2 = \frac{b^2+d^2}{2}$ (*)

$2c^2 = b^2+d^2$ (1)

$\Rightarrow 2ac + b^2 + d^2 = ab + b^2 + ad + d^2$

$2ac = ab + ad \;|\; : a$ (по условию $a, b, c, d > 0$)

$2c = b+d$

$c = \frac{b+d}{2}$ ✓

Рассмотрим (1): $2c^2 = b^2+d^2$

$2\left(\frac{b+d}{2}\right)^2 = b^2+d^2$

$2 \cdot \frac{b^2+2bd+d^2}{4} = b^2+d^2 \;|\; \cdot 2$

$b^2+2bd+d^2 = 2b^2+d^2$

$b^2-2bd+d^2=0$

$(b-d)^2=0$

$b-d=0$

$b=d \Rightarrow c = \frac{b+d}{2} = \frac{2b}{2} = b \Rightarrow$ ~~шаг~~ $c^2=b^2=d^2 \Rightarrow$ шаг прогрессии равен $0 \Rightarrow a^2=b^2=c^2=d^2$, а т.к. $a, b, c, d > 0$ $a=b=c=d$

ч. т. д.

№ 4

$m, n, k \in \mathbb{N}$

$m + \sqrt{n+\sqrt{k}} = 2023$

$\sqrt{n+\sqrt{k}} = (2023-m)$

$n+\sqrt{k} = (2023-m)^2$

Если k не полный квадрат, $\sqrt{k}$ - иррациональное $\Rightarrow (2023-m)^2$ иррациональное, чего быть не может. Следовательно, k - полный квадрат.

$\sqrt{n+\sqrt{k}}$ - натуральное (т.к. $(2023-m) \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow n+\sqrt{k}$ - полный квадрат

Т.к. $m, n, k \in \mathbb{N}$: $1^2+1^2 = 2 < 2^2 \le n+\sqrt{k} = (2023-m)^2 \le 2022^2$, т.е. $2^2 \le n+\sqrt{k} \le 2022^2$

Будем брать произвольные $\sqrt{k}$ от 1 до (2022^2-1), брать n, которые дополняют $\sqrt{k}$ до квадрата и по остаточному принципу находить m

продолжение на следующей странице ⟹

Бланк ответов

№ 4 (продолжение)

Т.к. $(a_{i+1})^2 = (a_i)^2 + x_{i+1}$, где $a_0 = 0$, x_i – i-ый член арифметической прогрессии всех нечетных натуральных чисел, начиная с $\underline{1}$, то для x_i $\sqrt{k}$ количество вариантов n будет равно $\underline{(2022 - x_i)}$ $= 1 + 2(i-1)$

неверно

Т.к. $(2022 - x_i) \in \mathbb{N}$ $x_n = 2021 = 1 + 2(1011 - 1) \Rightarrow$

Количество вариантов решений выглядит как

$$N = x_1(2022 - x_1) + x_2(2022 - x_2) + \ldots + x_{1011}(2022 - x_{1011}) = 2022 \cdot (x_1 + x_2 + \ldots + x_{1011}) - (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{1011}^2)$$

$$= 2022 \cdot (1 + 3 + \ldots + 2021) - (1^2 + 3^2 + \ldots + 1011^2) = 2022 \cdot \frac{(1+2021) \cdot 1011}{2} - ((1^2 + 2^2 + 3^2 \ldots + 1010^2 + 1011^2) - (2^2 + 4^2 + \ldots + 1010^2))$$

$$= 2022 \cdot 1011 \cdot 1011 - ((1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 1011^2) - 4 \cdot (1^2 + 2^2 + \ldots + 505^2))$$

Формула суммы первых n квадратов: $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (*)

$$\Rightarrow N = 2022 \cdot 1011 \cdot 1011 - \left(\frac{1011 \cdot 1012 \cdot 2023}{6} - 4 \cdot \frac{505 \cdot 506 \cdot 1011}{6}\right) = 2022 \cdot 1011^2 - (337 \cdot 506 \cdot 2023 - 2 \cdot 505 \cdot 506 \cdot 337)$$

$$= 2 \cdot 1011^3 - 337 \cdot 506(2023 - 1010) = 2 \cdot 1011^3 - 337 \cdot 506 \cdot 1013 = 2066728662 - 172738786 =$$

$$= 1893989876$$

$$2022 \geq \frac{(x_1 + x_n) \cdot n}{2} = \frac{(1 + 2(n-1)) \cdot n}{2} \Rightarrow 4044 \geq 2n^2 - 1 \quad 2022,5 \geq n^2 \quad \underline{n = 44}$$

неверно

Количество вариантов выглядит так: Формула неверная

$$N = x_1(2022 - x_1) + x_2(2022 - x_2) + \ldots + x_{44}(2022 - x_{44}) + (2022 - x_1 - x_2 - \ldots - x_{44})(2022 - x_{45}) =$$

$$= 2022(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{44}) - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_{44}^2) + (2022 - x_1 - x_2 - \ldots - x_{44})(2022 - x_{45}) =$$

$$= 2022(1 + 3 + 5 + \ldots + 89) - (1^2 + 3^2 + \ldots + 89^2) + (2022 - 1 - 3 - \ldots - 89)(2022 - 91) = 2022 \cdot \frac{90 \cdot 44}{2} -$$

$$- (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 89^2 - 24 \cdot (1^2 + 2^2 + \ldots + 44^2)) + \left(2022 - \frac{90 \cdot 44}{2}\right) \cdot 1931 \overset{(*)}{=} 2022 \cdot 90 \cdot 22 - \left(\frac{89 \cdot 90 \cdot 179}{6} - 4 \cdot \frac{44 \cdot 45 \cdot 89}{6}\right)$$

$$+ (2022 - 90 \cdot 22) \cdot 1931 = 2022 \cdot 1980 - \frac{89 \cdot 90}{6} \cdot (179 - 88) + (2022 - 1980) \cdot 1931 =$$

$$= 4003560 - 121485 + 81102 = 3963177$$

Ответ: 3963177

№ 5

Максимально Вася сможет получить $64 + 63 + 2 = 129$, т.к. за два хода он может попасть из 64 в 63 двумя способами, минимальные варианты 1 и 2

продолжение на обороте $\Rightarrow$

№ 5 (продолжение)

Вот пример, подтверждающий, что максимум – 129

50	60	15		55			
23	9	16		56			
57	7	58	55	63	60	61	62
48	11	17		54			
8	64	18		2			
47	12	19		53			
46	13	20		52			
45	14			51			

50	6	16	22	53	62	18	35
48	5	15	21	56	28	27	40
57	7	58	55	63	60	61	62
48	11	17	23	54	29	36	41
8	64	2	6	2	5	4	3
47	12	18	24	53	30	35	42
45	13	19	25	52	31	34	43
45	14	20	26	51	32	37	44

Ответ: 129 Можно больше

Бланк ответов