ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802607433567

Титульный лист

Направление	☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия
Класс	☐ 8 ☐ 9 ☒ 10 ☐ 11
Фамилия	САВЕЛЬЕВ
Имя	ПЛАТОН
Отчество	МИХАЙЛОВИЧ
Дата рождения	10 03 2006
Город участия	ИЖЕВСК
Аудитория	4
Телефон	89524098922
Дата	27 02 2023
Подпись	

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802607433567

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☒ 10 ☐ 11

Город участия ИЖЕВСК

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с 12:10 до 12:14

Протокол проверки

Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	0	15	20	0					
Балл члена жюри №2	20	0	15	20	0					

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Балл члена жюри №1										
Балл члена жюри №2										

Итоговый балл 55

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

1. Заметим, что в книге остались страницы, номера которых $\equiv 1$ или $2 \pmod 4$. Таким образом однозначные страницы в книге: 1, 2, 5, 6, 9.

Двузначных останется ровно 45, т.к. можно сопоставить пары для вырванных и оставшихся:

10 и 99, 11 и 98 и т.д. ($\equiv 2 \pmod 4$ сопоставляется $\equiv 3 \pmod 4$, и $\equiv 1 \pmod 4$ сопоставляется $\equiv 0 \pmod 4$, т.к. сумма в паре $= 109 \equiv 1 \pmod 4$) $\Rightarrow$ двузначные оставшиеся в книге образуют $2 \cdot 45 = 90$ цифр, и ещё 5 однозначных $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ остаётся 750 цифр. Все они принадлежат трёхзначным, т.к иначе в книге $\geq 9 + 90 \cdot 2 + 900 \cdot 3 = 2889$, но тогда кол-во цифр в вырванных страницах более 1000 больше чем в оставшихся, что очевидно невозможно.

Значит вырвано $750/3 = 250$ трёхзначных чисел $\Rightarrow$

$\Rightarrow 250/2 = 125$ пар чисел (листов).

Т.к. первая пара — 101, 102, то можно считать пары по второму числу имеющему формулу $98 + 4k$ $\Rightarrow$ при $k = 125$ пара будет 597, 598 - последний нечётный лист. За ним может быть вырван ещё один лист 599, 600 $\Rightarrow$ в книге могло быть 598 или 600 страниц. +

2. Покажем, что ≤ 3 цветов быть не может.
Пусть всего цветов ≤ 3. Тогда по принципу Дирихле есть цвет, точек которого ≥ 9 $\Rightarrow$ по принципу Дирихле, из 5 горизонталей есть та, на которой есть ≥ 2 точки этого цвета.
Следовательно цветов ≥ 4.
Пример на 4:

1	1	2	2	3
1	1	3	2	3
2	3	4	4	1
2	2	4	4	1
3	3	1	1	2

, легко убедиться, что пример подходит условию.

3. ~~Заметим, что особенное число, в котором не все цифры различны можно сделать таковым 9 способами, т.к. в нём различны все цифры кроме 2 (иначе поменяв цифры останутся одинаковые), а т.к. в этом числе не присутствует всего 1 цифра (здесь и далее рассматриваются только 10-значные числа, поэтому в числе присутствуют~~

Заметим, что в 10-значном особенном числе (если не все его цифры различны) присутствует 9 различных цифр, одна из которых — 2 раза.
Такие числа бывают 3 видов. 1 — в числе 2 нуля, 2 — в числе 1 ноль, 3 — в числе нет нулей.
1: в этом случае выбираем 9 способами какой цифры нет (во всех особенных 10-значных числах 9 различных цифр $\Rightarrow$ 1 цифра отсутствует), далее 8 способов выбрать первую цифру из 8 ненулевых присутствующих в числе, далее $\frac{9!}{2}$ — перестановки

оставшихся 9 с учётом, того, что перестановка нулей не имеет отличий $\Rightarrow$ всего $9 \cdot 8 \cdot \frac{9!}{2} = 36 \cdot 9!$ таких чисел. ✓

2: 9 способов выбрать ненулевую цифру, которой будет 2, ~~9~~ 8 способов выбрать ненулевую, которой не будет, $\frac{10!}{2} - \frac{9!}{2}$ все перестановки с учётом перестановки 2 одинаковых — те перестановки, в которых 0 на первом месте.

Всего $9 \cdot \overset{8}{\cancel{9}} \cdot \left(\frac{10!}{2} - \frac{9!}{2}\right) = 81\left(\frac{9! \cdot 10 - 9!}{2}\right) = 81\left(\frac{9 \cdot 9!}{2}\right) =$

$= 729 \cdot \frac{9!}{2}$.

3: 9 способов выбрать цифру, которой 2 (отсутствует 0), и $\frac{10!}{2} = 5 \cdot 9!$ перестановок с повторениями.

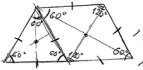
Всего $45 \cdot 9!$ таких чисел. ✓

Также есть числа у которых все цифры различны, их $10! - 9!$ (все перестановки 10 цифр — те в которых 0 на первом месте) $= 9 \cdot 9!$. ✓

Значит всего особенных 10-значных чисел $\left(36 + \frac{729}{2} + 45 + 9\right)9! =$ неверно посчитано

$= 454\frac{1}{2}\, 9!$ $\mp$

5. Да, существует:



, очевидно, что получившийся ромб и равносторонний треугольник имеют центр симметрии, а исходная трапеция — нет.

У треугольника нет центра симметрии

4. Пусть $a \neq b \neq c$, $a \neq c$. Тогда $a^2 - b^2 = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} - \frac{1}{a} - \frac{1}{c} - \frac{1}{d} \Rightarrow$
$\Rightarrow (a-b)(a+b) = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{(a-b)}{ab}$, а т.к. $a \neq b \Rightarrow$
$\Rightarrow a + b = \frac{1}{ab}$ √, аналогично $a + c = \frac{1}{ac}$ и $b + c = \frac{1}{bc}$
Тогда $a^2 b + ab^2 - 1 = 0$ и $a^2 c + ac^2 - 1 = 0$, а т.к. $b \neq c$, то b и c являются различными корнями уравнения $ax^2 + a^2 x - 1 = 0$ $\Rightarrow$ по теореме Виета $b + c = -a$, $bc = -\frac{1}{a}$. Тогда $a^2 = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{b+c}{bc} + \frac{1}{d} =$
$= \frac{-a}{-\frac{1}{a}} = a^2 + \frac{1}{d} \Rightarrow \frac{1}{d} = 0$, что невозможно $\Rightarrow$ среди a, b и c есть равные числа. √ Пусть не умаляя общности это a и b $\Rightarrow a = b$.
Заметим, что аналогичные рассуждения верны для a, c и d и b, c и d.
Тогда возможны случаи $a = c$, $a = d$ и $c = d$ ($b = d$ и $b = c$ аналогичны $a = d$ и $a = c$, т.к. $a = b$).

1: $a = c = b \Rightarrow \begin{cases} d^2 = \frac{3}{a} \\ a^2 = \frac{2}{a} + \frac{1}{d} \end{cases} \Rightarrow a = \frac{3}{d^2} \Rightarrow \frac{9}{d^4} = \frac{2d^2}{3} + \frac{1}{d} \Rightarrow$

$\Rightarrow 27 = 2d^6 + 3d^3 \Rightarrow 2t^2 + 3t - 27 = 0$, $t = d^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow t = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 216}}{4} = \frac{-3 \pm 15}{4}$, $t_1 = 3$, $t_2 = -\frac{9}{2}$

$d_1^3 = 3 \Rightarrow d_1 = \sqrt[3]{3} \Rightarrow a_1 = \frac{3}{\sqrt[3]{3^2}} = \frac{\sqrt[3]{3^3}}{\sqrt[3]{3^2}} = \sqrt[3]{3} \Rightarrow a = b = c = d = \sqrt[3]{3}$ √

$d_2^3 = -\frac{9}{2} \Rightarrow d_2 = -\frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{2}} \Rightarrow a_2 = \frac{3}{\sqrt[3]{\frac{81}{4}}} = \frac{3}{3\sqrt[3]{\frac{3}{4}}} = \sqrt[3]{\frac{4}{3}} \Rightarrow a = b = c = \sqrt[3]{\frac{4}{3}}$
$d = -\sqrt[3]{\frac{9}{2}}$ √

Случай когда $a = b = d$ аналогичен с перестановкой букв.

2: $a = b$, $c = d \Rightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{1}{a} + \frac{2}{c} \\ c^2 = \frac{1}{c} + \frac{2}{a} \end{cases} \Rightarrow a^2 - c^2 = \frac{1}{c} - \frac{1}{a} \Rightarrow$

$\Rightarrow (a-c)(a+c) = \frac{a-c}{ac}$ (случай когда $a=c \Rightarrow$ все 4 числа равны уже разобран, т.к. тогда $a^2 = \frac{3}{a} \Rightarrow a=\sqrt[3]{3}$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow a+c = \frac{1}{ac} \Rightarrow a^2 = \frac{1}{a} + \frac{2}{c} = \frac{c+2a}{ac} = (c+2a)(a+c) = 2a^2+3ac+c^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (a+c)^2 = -ac = -\frac{1}{a+c} \Rightarrow (a+c)^3 = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow a+c = -1$ $\cancel{\Rightarrow a = -1-c \Rightarrow c^2 = \frac{1}{c} + \frac{2}{-1-c} \Rightarrow}$

$\cancel{\Rightarrow c^3(-1-c) = -1-c+2c \Rightarrow -c^4-c^3 = c-1 \Rightarrow}$

$\cancel{\Rightarrow c^4+c^3+c-1=0}$ $\Rightarrow -1 = \frac{1}{ac} \Rightarrow ac = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a+c=-1 \\ ac=-1 \end{cases} \Rightarrow a = -c-1 \Rightarrow -c^2-c=-1 \Rightarrow$

$\Rightarrow c^2+c-1=0 \Rightarrow c = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, один из корней $-c$, другой $-a$.

Получается есть одно решение когда все числа равны $\sqrt[3]{3}$, 4 решения когда одно из чисел равно $-\sqrt[3]{\frac{9}{2}}$, а 3 остальных $\sqrt[3]{\frac{4}{3}}$, и 6 решений когда 2 из чисел равны $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, а 2 других $\frac{-\sqrt{5}-1}{2}$. +