ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802290471257

Титульный лист

Направление	☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия
Класс	☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11
Фамилия	ШАХМАЕВ
Имя	АЛЕКСАНДР
Отчество	АНДРЕЕВИЧ
Дата рождения	11 10 2005
Город участия	ЕКАТЕРИНБУРГ
Аудитория	622
Телефон	+79122635499

Дата 27 02 2023 Подпись шр

Пример заполнения
А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802290471257

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

Протокол проверки

0 **Заполняется жюри**

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	~~20~~	20	20	10	0				
Балл члена жюри №2	20	0	20	16	0					

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Балл члена жюри №1										
Балл члена жюри №2										

Итоговый балл 63

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

№1.

Рассмотрим все интересующие нас числа-палиндромы:

1) 11; 22; … 99 — числа вида $11k_1$, $k_1 \in \mathbb{N} \cap [1;9]$

2) 101; .. 191; 202; .. 292, ... ; 909; . 999 — числа вида $101k_2 + 10k_3$, $k_2 \in \mathbb{N} \cap [1;9]$; $k_3 \in \mathbb{Z} \cap [0;9]$

3) 1001, . . 1991; 2002 (дальше не берем, т.к. > 2021) — числа вида $1001k_4 + 110k_5$, $k_4 \in \mathbb{N} \cap [1;9]$; $k_5 \in \mathbb{Z} \cap [0;9]$

Суммируя все числа первого вида, получим число $11K_1$, где K_1 — натуральное или 0, если таких чисел в сумме нет. Аналогично, суммируя все числа второго вида, получим число $101K_2 + 10K_3$, где K_2 и K_3 — нат. или 0, и суммируя все числа третьего вида, получим число $1001K_4 + 110K_5$, где K_4 и K_5 — нат. или 0.
При этом, если $K_2 = 0$, то $K_3 = 0$, и если $K_4 = 0$, то $K_5 = 0$.

Числовой пример теперь имеет вид

$1001K_4 + 110K_5 + 101K_2 + 11K_1 + 10K_3 = 2021$.

хотелось бы пояснения, почему это так

Если $K_4 = 2$, то $\underline{110K_5 + 101K_2 + 11K_1 + 10K_3 = 19}$ не имеет решений.

Если $K_4 = 1$, то $110K_5 + 101K_2 + 11K_1 + 10K_3 = 1020$, и одно число (1001) уже задействовано, а 1020 — не палиндром, т.е. потребуется задействовать ещё как минимум 2 числа, т.е. всего ≥ 3 чисел. Пример находится: $K_2 = 10$, $K_3 = 1$, числа: 909, 111, а также 1001.

Если $K_4 = 0$, то $K_5 = 0$; $\cancel{101K_2 + 11K_1 + 10K_3 = 2021}$, и сумма состоит только из чисел первого и второго вида, т.е. чисел < 1000, поэтому таких чисел должно быть ≥ 3, чтобы получилась сумма, >2000.

Итак, минимальное число слагаемых и минимальное число задач для студента равно 3. Найденный пример:

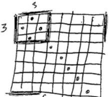
$1001+909+111=2021$.

пример есть✓

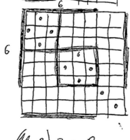
+.

№5.

Рассмотрим числа от 56 до 64. Их 9, поэтому найдутся 2, стоящие в одной строке, и 2, стоящие в одном столбце. Но среди них может не быть общего числа, например, если они стоят, как на рисунке.



То же верно для 10 чисел от 55 до 64. Но если взять 11 чисел от 54 до 64, то пересечение найдётся: из них найдутся 3 числа, ~~об~~ лежащие в „вершинах буквы Г", или 3 числа, лежащие в одной строке или столбце.



Это из-за того, что $(10-8)\cdot 3\leq 8$, но $(11-8)\cdot 3>8$.

В худшем случае это окажутся числа 54, 55, 56, их сумма равна 165.

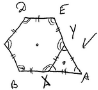
есть оценка на 165

±

Ответ: 165.

№2.

Ответ: Да.



у треугольника нет центра симметрии

Пятиугольник $ABCDE$, в котором $AB = 2BC = 2CD = 2DE = AE$; $\angle B = \angle C = \angle D = \angle E = 120^\circ$; $\angle A = 60^\circ$, можно разрезать по линии XY (X – середина AB, Y – середина AE) на правильный шестиугольник $XBCDEY$ и правильный треугольник AXY, имеющие центры симметрии, совпадающие с их геометрическими центрами. Очевидно, $ABCDE$ центра симметрии не имеет.

+ −

№4.

Все возможные пары значений m и $\sqrt{n+\sqrt{k}}$: $(1; 2022)$; $(2; 2021)$; ... $(2022; 1)$. Если $\sqrt{n+\sqrt{k}} = i$ $(i \in \mathbb{N} \cap [1; 2022])$, то $n+\sqrt{k} = i^2$.

Все возможные пары значений n и $\sqrt{k}$: $(1; i^2-1)$; $(2; i^2-2)$; ... $(i^2-1, 1)$. Если $\sqrt{k} = j$ $(j \in \mathbb{N} \cap [1; i^2-1])$, то $k = j^2$, $n = i^2 - j$; $m = 2023 - i$.

Для каждого i существует i^2-1 значений j, а значит, существует i^2-1 различных решений для m, n, k. Для различных i решения различны, т.к. $m = 2023 - i$. i принимает все целые значения от 1 до 2022, значит, искомое число решений равно

$$\sum_{i=1}^{2022}(i^2-1) = \sum_{i=1}^{2022} i^2 - \sum_{i=1}^{2022} 1 = \frac{2022(2022+1)(2\cdot 2022+1)}{6} - 2022 = 2.760.512.273. \text{ — ответ.}$$

млрд млн тыс

Арифметическая ошибка

(от 2 до 3 млрд)

(согласуется с $\frac{2023^3}{3}$)

+

$$\begin{array}{r} \times\ 2022 \\ 2023 \\ \hline 6066 \\ 4044 \\ 4044 \\ \hline 4090506 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2022 & 6 \\ \hline -18 & 337 \\ -22 & \\ 18 & \\ -42 & \\ 42 & \\ \hline 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\ 2023 \\ 337 \\ \hline 14161 \\ 6069 \\ 6069 \\ \hline 682451 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\ 682451 \\ 4045 \\ \hline 3412255 \\ 2729804 \\ 2729804 \\ \hline 2760514295 \\ -\ 2022 \\ \hline 2760512273 \end{array}$$

№3.

Пусть разность прогрессии a^2, b^2, c^2, d^2 равна n.
Если $n=0$, то $a^2=b^2=c^2=d^2$, откуда с условием на положительность a,b,c,d следует $a=b=c=d$.
Если $n>0$, то $d>c>b>a>0$. Рассмотрим этот случай.

Обозначим $\Sigma = a+b+c+d$. Если разность второй прогрессии k, то

$$\frac{1}{\Sigma-a}-\frac{1}{\Sigma-b}=\frac{1}{\Sigma-b}-\frac{1}{\Sigma-c}=\frac{1}{\Sigma-c}-\frac{1}{\Sigma-d}=k;$$

$$\frac{a-b}{(\Sigma-a)(\Sigma-b)}=\frac{b-c}{(\Sigma-b)(\Sigma-c)}=\frac{c-d}{(\Sigma-c)(\Sigma-d)}=k;$$

$$\frac{1}{(\Sigma-a)(\Sigma-b)(a+b)}=\frac{1}{(\Sigma-b)(\Sigma-c)(b+c)}=\frac{1}{(\Sigma-c)(\Sigma-d)(c+d)}=-\frac{k}{n},$$

потому что $(d-c)(d+c)=(c-b)(c+b)=\cancel{(a-b)}(b-a)(b+a)=n$.

Отсюда следует $(\Sigma-a)(\Sigma-b)(a+b)=(\Sigma-c)(\Sigma-d)(c+d)$:

$$(c+d+b)(c+d+a)(a+b)=(a+b+d)(a+b+c)(c+d);$$

$$((c+d)^2+(a+b)(c+d)+ab)(a+b)=((a+b)^2+(a+b)(c+d)+cd)(c+d);$$

$$\cancel{(a+b)(c+d)^2}+\cancel{(a+b)^2(c+d)}+ab(a+b)=\cancel{(a+b)^2(c+d)}+\cancel{(a+b)(c+d)^2}+cd(c+d);$$

$$ab(a+b)=cd(c+d).$$

Но это, очевидно, неверно при $d>c>b>a>0$, (т.к. $cd>ab>0$ и $c+d>a+b>0$), так что $n>0$ неверно.

Если $n<0$, то $a>b>c>d>0$; теми же самыми рассуждениями приходим к равенству $ab(a+b)=cd(c+d)$, и теперь оно неверно уже потому, что $ab>cd>0$ и $a+b>c+d>0$. Так что $n<0$ не подходит.

Итак, $n=0$, поэтому $a=b=c=d>0$.

+

Доказано