ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802115401049

Титульный лист

Направление ☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☒ 9 ☐ 10 ☐ 11

Фамилия ДЕМЕНЕВА

Имя МАРГАРИТА

Отчество ВИТАЛЬЕВНА

Дата рождения 11 11 2006

Город участия ПЕРМЬ

Аудитория 309

Телефон 89128820861

Дата 27 02 2023 **Подпись**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802115401049

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ информатика ☐ история ■ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ■ 9 ☐ 10 ☐ 11

Город участия ПЕРМЬ

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке 1

Время выхода с : до :

Протокол проверки

Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	~~20~~ 7	~~20~~ 20	0	0					
Балл члена жюри №2	20	7	20	0	0					

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Балл члена жюри №1										
Балл члена жюри №2										

Итоговый балл 47

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

Задание №1

Пусть y (руб.) - стоимость печати обложки, x (коп) стоимость печати листа. Тогда $100y$ (коп.) - стоимость печати обложки (в копейках). Так же из-за округления (получим верхнюю и нижнюю границу) следующие неравенства:

$$\begin{cases} 13301 \leq 100y + 104x \leq 13400 \\ 18001 \leq 100y + 192x \leq 18100 \end{cases}$$ (выражено все в копейках)

Выразим y из 1го неравенства:

$$\frac{13301 - 104x}{100} \leq y \leq \frac{13400 - 104x}{100}$$

Подставим во второе (максимальное значение ~~при~~ сравнивая с 18001 и минимальное при сравнении с 18100).

$$18001 \leq 100 \cdot \frac{13400 - 104x}{100} + 192x = 13400 - 104x + 192x \Rightarrow 18001 - 13400 = 4601 \leq 88x \Rightarrow$$

$$\frac{4601}{88} = 52\frac{25}{88} \leq x, \text{ т.к. } x \text{ целое} \Rightarrow 53 \leq x$$

$$100 \cdot \frac{13301 - 104x}{100} + 192x = 13301 - 104x + 192x = 13301 + 88x \leq 18100 \Rightarrow 88x \leq 18100 - 13301 = 4799 \Rightarrow x \leq \frac{4799}{88} = 54\frac{47}{88}$$

Тк x целое $\Rightarrow x \leq 54$. Получили: $53 \leq x \leq 54$.

Подставим по очереди $x=53$ и $x=54$.

при $x=53$коп.

$\dfrac{13301 - 104 \cdot 53}{100} = 77{,}89 \leq y \leq 78{,}88$, тк

y целое $\Rightarrow 78 \leq y \leq 78 \Rightarrow y = 78$руб.

при $x=54$коп.

$\dfrac{13301 - 104 \cdot 54}{100} = 76{,}85 \leq y \leq 77{,}84$, тк

y целое $\Rightarrow y = 77$руб.

Подставим $y=78$руб. (при этом $x=53$коп) во 2ое нер-во.

$18001 \leq 7800 + 192 \cdot 53 = 7800 + 10176 = 17976$

$18001 \leq 17976 \Rightarrow$ это не верно $\Rightarrow y \neq 78$руб.

Убедимся, что $y = 77$руб. (при этом $x=54$коп)

подходит $18001 \leq 100 \cdot 77 + 54 \cdot 192 = 7700 + 10368 =$

$= 18068 \leq 18100$

Ответ: 77руб.

+

Задание №2.

Пусть $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \underset{3}{\equiv} x$ (где $N = \overline{a_1 a_2 \ldots a_n}$), то есть,

$N = \overline{a_1 a_2 \ldots a_n} \underset{3}{\equiv} x$ (Докажем этот факт, хотя он распространенный: пусть $a_1 \underset{3}{\equiv} x_1$; $a_2 \underset{3}{\equiv} x_2$; … ; $a_n \underset{3}{\equiv} x_n$ $\Rightarrow$

$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \underset{3}{\equiv} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = x$. $\overline{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n} = 10^{n-1} a_1 + a_2 \cdot 10^{n-2} +$

$+ \ldots + a_n \underset{3}{\equiv} 1^{n-1} \cdot x_1 + 1^{n-2} x_2 + \ldots + x_n \underset{3}{\equiv} x_1 + x_2 + \ldots + x_n \underset{3}{\equiv} x$).

или делится на 9

Любой квадрат по модулю 3 дает остаток 1 (достаточно известный факт, но докажем, по модулю 3 бывает 3 остатка: 0;1;2, если $x \underset{3}{\equiv} 0 \Rightarrow x \vdots 3 \Rightarrow x^2 \vdots 9$,

если $x \underset{3}{\equiv} 1 \Rightarrow x \cdot x \equiv x^2 \underset{3}{\equiv} 1 \cdot 1 \underset{3}{\equiv} 1$; $x \underset{3}{\equiv} 2 \Rightarrow x \cdot x = x^2 \underset{3}{\equiv} 2 \cdot 2 \underset{3}{\equiv} 4 \underset{3}{\equiv} 1$)

Предположим 40...05 можно так представить

Заметим, что от перестановки цифр в числе их суммы не меняется => остаток по модулю 3 тоже.

400..05 ⋮ 9 (т.к. сумма цифр делится на 9) => 400..05 ⋮ 3 (Пусть ни одно из чисел квадратов не делится на 3 => сумма по модулю 3 дает остаток 2 => такого быть не может. Если хотя бы одно число делится на 3 (=> делится и на 9), тогда т.к. одно делится на 9 и сумма делится на 9, значит, второе число делится на 9) => если можно это сделать => квадраты чисел должны делиться на 9). Квадраты чисел могут оканчиваться на 1; 4; 6; 9; 5 (0 не может из-за числа) => сейчас (в сумме этих квадратов) это первые числа. 2 числа в сумме должны давать 4, а это 9 и 5 (единственный вариант) (если есть квадрат 5 => в том случае одно число оканчивается на 5 => следующий разряд 2 (на 52.)) но тогда даст +1 => такого не может быть.

(если же через разряд даст +1, то сумма 3,4 такое не возможно), или одно число должно быть длиннее другого и оканчиваться на 4 (квадрат). ∨ Единственной вариант будет число длиннее другого и начинается на 4 (=> квадрат чисел, оканчивающихся на 2 или 8) => перед этим число, которое длиннее имеет 0 (а другое число должно что-то иметь но не может быть 0) => Следовательно ракурсия для последующих

$\perp$

Задание №3

Заметим правило (Заметим $A=0$ делится на все => A будем считать не равное 0)

Пусть $N=\overline{a_1a_2}=10a_1+a_2$

$$\frac{A}{a_1+a_2}-\frac{A}{a_1a_2}=\frac{A}{N}=\frac{A}{10a_1+a_2}$$ разделим на A

$$\frac{1}{a_1+a_2}-\frac{1}{a_1a_2}=\frac{1}{10a_1+a_2}$$ (перемножим и перенесем все в одну часть)

$$(a_1a_2-a_1-a_2)(10a_1+a_2)=a_1a_2(a_1+a_2)$$

$$9a_1^2a_2-10a_1^2-11a_1a_2-a_2^2=0$$, т.к. a_1 и a_2 цифры => a_1 и a_2 находятся в диапазоне $0..9$, но если a_1 или a_2 равны 0 => $a_1a_2=0$ (но $\frac{A}{0}$ некорректно) => $a_1, a_2 \in [1, 9]$

$$a_1^2(9a_2-10)-11a_1a_2-a_2^2=0 \checkmark$$

$$D=121a_2^2+4a_2^2(9a_2-10)=$$

$$=a_2^2(121+36a_2-40)=$$

$$=a_2^2(81+36a_2)=(3a_2)^2\cdot(9+4a_2)$$

Т.к. $a_1=\frac{11a_2\pm\sqrt{D}}{2\cdot(9a_2-10)}$ => a_2 - целое и a_1 целое => $\sqrt{D}$ - рационален

Значит D - квадрат. Переберем a_2, при

$a_2=1$; $D=3^2(9+4)=3^2\cdot13$ не квадрат

$a_2=2$; $D=6^2(9+8)=6^2\cdot17$

$a_2=3$; $D=9^2(9+3\cdot4)=9^2\cdot21$

$a_2=4$; $D=12^2(9+4\cdot4)=12^2\cdot5^2$ подходит

$a_2=5$; $D=15^2(9+5\cdot4)=15^2\cdot29$

$a_2=6$; $D=18^2(9+6\cdot4)=33\cdot18^2$

$a_2=7$; $D=21^2(9+4\cdot7)=21^2\cdot37$

$a_2=8$; $D=24^2(9+4\cdot8)=41\cdot24^2$

$a_2=9$; $D=27^2(9+9\cdot4)=45\cdot27^2$

Значит подходит только $a_2=4$. При этом

$D=60^2 \Rightarrow a_1=\dfrac{11\cdot4\pm60}{2\cdot(9\cdot4-10)}$ при -60 получается отр. $44,70$ $=\dfrac{114+60}{2(9\cdot4-10)}=2$

$\underset{36\ \ 4}{}$

Ок $\Rightarrow N=\overline{a_1a_2}=24$

Ответ: $N=24$. +

Задание № 4

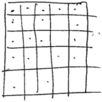
Максимум точек (центров) эти 4 прямые займут $4\cdot5=20$ (всего $5\cdot5/1=25$) $\Rightarrow$ по кол-ву центров это возможно (не гарантируется что это возможно в данном случае). Тогда между соседними центрами отрезок будем называть парой, то есть пара

Это : (если квадраты граничат стороной или вершиной, то

 или  или 

их центры образуют пару).

Посчитаем сколько пар всего. По горизонталям



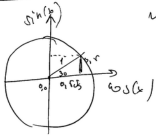
$4 \cdot 5$; по вертикалям $4 \cdot 5$; по диагоналям $16 \cdot 2$ $\Rightarrow$ всего $4 \cdot 5 + 4 \cdot 5 + 16 \cdot 2 = 72$.

Максимальное кол-во пар, которое может уничтожить А дальше?

Задание №5

См. черновик

ешение №6



Можно сказать $\frac{30^\circ}{n}$ - это сколько-ни равных углов поделены угол 30°,

Тогда ~~должно~~ по св-ву биссектрисы будет делить в отношении сторон отрезок противоположный, а

Т.к. из точки 0,0 будут проводить эти линии => они будут меньше 1 (т.к. отрезок внутри), при этом 1 сторона ($0{,}5\sqrt{3} = const$) => отрезок показывающий $\sin(x)$ будет зависеть от большую долю $\sin(x)$ (но никогда не достигнет полностью) =>

при $n=2$ будет (докажем что при всех степенях 2 работает) тогда при степенях между этими нижняя граница у степени двойки как отрезок меньше чем при других величинах)

при $n \geq 2^k$, но $n \leq 2k$)
при $n = 2^k$

$\sin\left(\frac{30}{2}\right) =$

$$= \frac{0{,}5}{1 + 0{,}5\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3} \quad \frac{1}{4} \Rightarrow 2 - \sqrt{3} > \frac{1}{4}$$ (перенесем число $\frac{1}{4}$ в левую и возведем в квадрат).

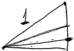
$\sqrt{3}$ в правую

Тогда т.к. отношение увеличивается => при этом отношение или уменьшается sin =>

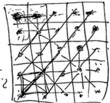
$$\frac{0{,}5}{(1 + 0{,}5\sqrt{3})^n} = \frac{1}{(2+\sqrt{3})^n} = (2-\sqrt{3})^n \ ? \ \frac{1}{2n} \Rightarrow$$

$$2n(2-\sqrt{3})^n \ ? \ 1$$

9 . 4 А дальше?



1 $\quad 0{,}6 \quad 0{,}6\sqrt{3}$



$4 \cdot 5 \cdot 2$

$4 \cdot 5 \; 2$

8 $\quad 6 \cdot 4 + 42$

$24 + 8$

$32 +$

$76 \cdot 211 \; (8 \; 5 - 4 : 4$

46

$8 \cdot 4 + 8 \cdot 5$

$8 \cdot 9$

$(3x)^2$ ———

$(3y)^2$ ———

$a_k + 10a_{k-1} + \dots + 10^{k-1} a_1 +$

$+ a_n + \dots + 10^{n-1} a_k$

8 9 $\qquad$ 5 $\qquad 8 \cdot 5 = 4$

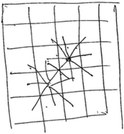
$\cancel{4 \cdot (20-1)}$

$4 \cdot 19$

$\underbrace{444\dots4}$ 5

144 $\quad$ 16

49 $\quad$ 81 $\quad$ 9



441
36
477

144
36
180

16.

441
63
504

$\cancel{54}$ $\quad$ 36 $\quad$ 4

63 $\quad$ 7

18 $\quad$ 28

409

20

45

52.

$\overline{a_1 a_2 \dots a_k}$ ~~чет~~ 405

$\overline{b_1 b_2 \dots b_n}$ нечет.

$40 \dots 005$

10

26

30

$400 \dots 005$

1
4
6
9

$\cancel{20}$ $101^0 = 1 + 4 = 5$

$+ 010^0 = 2$

0

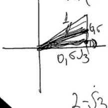
5 $\quad$ 111 $\quad$ 7

$\frac{1}{(2+\sqrt{3})^{n-1}}$ $\quad \frac{1}{2n}$ $\quad$ 104 $\quad$ 100 $\quad$ 9

$(2-\sqrt{3})^{n-1}$ $\quad 0{,}6 \quad \frac{1}{2n}$ $\quad$ 1001

11

$2n(2-\sqrt{2})^{n-1}$



$x \quad 4 \qquad x + 0{,}5\sqrt{3}x = 0{,}5$

$\frac{0{,}6}{(1+0{,}5\sqrt{3})^{n-1}}$

3

$\sqrt{3} \quad 2\frac{1}{4}$

$x(1+0{,}5\sqrt{3}) = 0{,}5$

$2-\sqrt{3}$

$x = \frac{0{,}5}{1+0{,}5\sqrt{3}} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{\cancel{8}}$ $\quad \frac{1}{4}$