ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802636107562

# Титульный лист

**Направление** ☐ информатика ☐ история ■ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

**Класс** ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ■ 11

**Фамилия** КОВАЛЕНКО

**Имя** ЕВГЕНИЙ

**Отчество** ЮРЬЕВИЧ

**Дата рождения** 28 12 2005

**Город участия** ЕКАТЕРИНБУРГ

**Аудитория** Д3

**Телефон** 89506569608

**Дата** 27 02 2023 **Подпись**

**Пример заполнения** А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802636107562

# Проверочный лист

## Заполняется участниками

**Направление** ☐ информатика ☐ история ■ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

**Класс** ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ■ 11

**Город участия** ЕКАТЕРИНБУРГ

## Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

## Протокол проверки
## Заполняется жюри

| Номер задания | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Балл члена жюри №1 | 20 | 0 | 20 | 0 | – | | | | | |
| Балл члена жюри №2 | 20 | 0 | 20 | 0 | – | | | | | |

| Номер задания | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Балл члена жюри №1 | | | | | | | | | | |
| Балл члена жюри №2 | | | | | | | | | | |

**Итоговый балл** 40

**Подпись члена жюри №1**

**Подпись члена жюри №2**

**Пример заполнения** А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

№4. $m+\sqrt{n+\sqrt{k}}=2023$. $m,n,k\in\mathbb{N} \Rightarrow m,n,k\geq 1$, $m,n,k\in\mathbb{Z}$

$44^2=1936$, $45^2=2025 \Rightarrow 44^2 < m+\sqrt{n+\sqrt{k}} < 45^2$. неверно

$m,n,k\in\mathbb{Z} \Rightarrow n+\sqrt{k}$ – точный квадрат, при этом $n+\sqrt{k}\geq 1+\sqrt{1}=2$, но т.к. $n+\sqrt{k}$ – точный квадрат, то $n+\sqrt{k}\geq 4$. Тогда $n+\sqrt{k}$ может принимать любое значение $f^2$, где $f\in[2;44]$, $f\in\mathbb{Z}$ (всего 43 значения) и каждому значению $n+\sqrt{k}$ в соответствие можно однозначно поставить число $m$ ($m=2023-\sqrt{n+\sqrt{k}}$). Значит, среди троек-решений ур-ия $(m;n;k)$ существует 43 различные значения числа $m$. $n+\sqrt{k}$ – 43 значения. Пусть $n+\sqrt{k}=f^2$, $\sqrt{k}=f^2-n \Rightarrow \sqrt{k}\geq 1$, $\sqrt{k}\leq(f-1)^2<f^2$ ($k$ – точный квадрат $\Rightarrow k$ может принимать $f-1$ значение – все точные квадраты от $1^2$ до $(f-1)^2$). Тогда для ур-ия $n+\sqrt{k}=f^2$ $k$ можно найти $f-1$ способом, а $n$ найдётся однозначно из равенства $n=f^2-\sqrt{k}$. Тогда искомое кол-во решений равно:

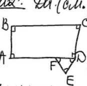
$x=\sum_{f=2}^{44} f-1=\sum_{f=1}^{43} f=\frac{43\cdot 44}{2}=43\cdot 22=946$ способов (для каждого значения $f$

неверная формула подсчёта

однозначно находим $m=2023-f$, $(f-1)$ способом находим $k$ и однозначно находим $n=f^2-\sqrt{k}$).

Ответ: 946 троек.

№7. Да (см. рис. ниже);




рассмотрим многоугольник ABCDEF как на рис.; у него $\angle A=\angle B=\angle C=\angle ADC=90^\circ$, $\angle E=\angle DFE=\angle EDF=60^\circ$. F лежит на AD.

Многоугольник ABCDEF не имеет центра симметрии, но его можно разрезать на прямоугольник ABCD (у прямоугольников есть центр симметрии) и на правильный треугольник DEF (у правильных треугольников он тоже есть).

неверно

№3. $a, b, c, d > 0$; $a^2, b^2, c^2, d^2$ – арифм. п.; $\frac{1}{a+b+c}, \frac{1}{b+a+d}, \frac{1}{a+c+d}, \frac{1}{b+c+d}$ – арифм. пр. Д-ть: $a = b = c = d$.

Д-во: пусть $p = a+b+c+d$, тогда вторую прогрессию можно записать в виде $\frac{1}{p-d}, \frac{1}{p-c}, \frac{1}{p-b}, \frac{1}{p-a}$. По св-ву арифм. прогр. для первой прогрессии: $d^2-c^2 = c^2-b^2 = b^2-a^2 \Rightarrow d^2-c^2 = c^2-b^2$; $\underline{b^2+d^2 = 2c^2}$;
$c^2-b^2 = b^2-a^2$, $\underline{a^2+c^2 = 2b^2}$; $d^2-c^2 = b^2-a^2$, $\underline{a^2+d^2 = b^2+c^2}$.

Для второй прогрессии:

$\frac{1}{p-a} - \frac{1}{p-b} = \frac{1}{p-b} - \frac{1}{p-c} \Rightarrow \frac{p-b-p+a}{(p-a)\cancel{(p-b)}} = \frac{p-c-p+b}{\cancel{(p-b)}(p-c)} \Rightarrow (a-b)(p-c) = (b-c)(p-a) \Rightarrow$
$\Rightarrow (a-b)(a+b+d) = (b-c)(b+c+d) \Rightarrow (a-b)(a+b) + d(a-b) = (b-c)(b+c) + d(b-c) \Rightarrow$
$\Rightarrow a^2-b^2 = b^2-c^2+d(2b-a-c) \Rightarrow a^2+c^2 = 2b^2+d(2b-a-c)$. Но по ранее полученным равенствам $a^2+c^2 = 2b^2 \Rightarrow d(2b-a-c) = 0$. Тогда либо $d=0$, либо $2b-a-c=0$, но по условию $d>0 \Rightarrow 2b = a+c$. Т.к. $a^2+c^2 = 2b^2$, то $2a^2+2c^2 = 4b^2 = (2b)^2 = (a+c)^2 = a^2+c^2+2ac \Rightarrow a^2-2ac+c^2 = 0 \Rightarrow (a-c)^2 = 0 \Rightarrow \underline{a=c}$. Пусть $f$ – разность первой прогрессии, тогда если $a^2, b^2, c^2, d^2$ – прогрессия арифм., то $b^2-a^2 = c^2-b^2 = a^2-b^2 \Rightarrow 2a^2 = 2b^2 \Rightarrow |a| = |b|$, но т.к. $a, b > 0$, то $a = b$. Так же $d^2-c^2 = c^2-b^2 \Rightarrow d^2-a^2 = a^2-a^2 = 0 \Rightarrow d^2 = a^2 \Rightarrow |d| = |a|$ – аналогично $a = d$.

Т.к. $a = b$, $a = c$, $a = d$, то $a = b = c = d$.

№4. Пусть 2021 представимо в виде суммы двух палиндромов. Пусть среди них нет 4$^x$-значных, тогда $2021 < 999+999 = 1998$ – противоречие. Тогда есть хотя бы один 4$^x$-значный палиндром в слагаемых (назовём его П). Если этот палиндром вида $\overline{1aa1}$, то второй пусть равен $x$, тогда $\overline{1aa1} + x = 2021 = 1000+100a+10a+1+x = 2021 \Rightarrow 1020 = x+110a \Rightarrow x = 1020-110a = -10(-102-11a)$ – круглое число (заканчивается на 0) $\Rightarrow x$ – не палиндром, иначе $x$ начинается с 0 – такого быть не может. √

Если этот палиндром $П = \overline{2aa2}$, то $2021 = 2002+110a+x \Rightarrow 110a+x = 19$. Если $a \geq 1$, то $x<0$ – тоже противоречие, если $a=0$, то $x=19$ – не палиндром.

Если этот палиндром вида $\overline{baab}$, где $b>2$, то $x = 2021-1001b-110a < 0$ – противоречие. Значит, 2$^x$ слагаемых быть не может. 2021 – не палиндром $\Rightarrow$ одного слагаемого тоже быть не может. Значит, слагаемых хотя бы 3 (например, $2021 = 1001+616+404$ – 3 слагаемых-палиндрома) $\Rightarrow$ студент может получить минимум 3 задачи.

Ответ: 3.

Бланк ответов

W