ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802479354619

Титульный лист

Направление	☐ информатика	☐ история	☒ математика
	☐ обществознание	☐ русский язык	☐ физика
	☐ химия		

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Фамилия ПРОКАШЕВА

Имя КСЕНИЯ

Отчество ЮРЬЕВНА

Дата рождения 04 02 2005

Город участия КАЛИНИНГРАД

Аудитория КЛУБ

Телефон 89856975575

Дата 27 02 2023 **Подпись**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802479354619

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Город участия КАЛИНИНГРАД

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	14	20	0	11	0					
Балл члена жюри №2	14	20	0	11	0					

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Балл члена жюри №1										
Балл члена жюри №2										

Итоговый балл 45

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

Задание 1

$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = 2021$, при этом a_i – палиндромы

$11 + 505 + \dots$

2002 – ближайший палиндром к 2021

1) $2021 = 2002 + \dots ?$

Этот вариант не подходит

Остаётся 19, но это число не является палиндромом. Также по условию $a_i > 10$, значит разбить 19 на два слагаемых также не получится, т.к. одно из них будет < 10. $(19 : 2 = \cancel{8}\ 9{,}5)$ ✓

2) Следующий палиндром после 2002 – это 1991

$2021 = 1991 + \dots ?$

Этот вариант не подходит

Остаётся 30. Это число не является палиндромом. Также 30 нельзя получить суммой двух других палиндромов, т.к. два единственных палиндрома до 30 – это 11 и 22.

3) После 1991 идёт 1881. Остаётся 140. Это число не является палиндромом. Можно ли 140 получить суммой палиндромов?

Рассмотрим палиндромы и их суммы. Очевидно, что "палиндромы до ста" – это 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99. При их помощи можно получить 110. ~~В первых трёх шагах мне не~~ Дальше идут палиндромы следующего вида: $\overline{1n1}$, где ~~…~~ $n \in [0;9]$. ~~…~~ Если складывать "палиндромы до 100", то будут получаться либо другие "палиндромы до ста", либо 110.

Этот вариант не подходит. 140 также не получится получить из палиндромов.

(110 - не получится, останется 30 (уже доказано, что нельзя), другими способами также не получится, т.к. след. по величине число – это 200)

~~4) После 1881 идёт 1771~~

4) После 1881 идёт 1771. Остаётся 250. ~~…~~ не является палиндромом. Но! Его можно получить суммой двух палиндромов: $99 + 151 = 250$

Итог: получается, что число 2021 можно представить тремя палиндромами:

$$2021 = 1771 + 151 + 99 \text{ пример}$$

Это количество слагаемых является наименьшим, ~~...~~ по нескольким причинам:

1) Палиндромы ~~...~~ от 1000 и до 2000 выглядят следующим образом — $\overline{1nn1}$, где $n \in [0;9]$ (т.к. последняя цифра зеркальна с первой). Таким образом, в остатке остается число, оканчивающееся на 0 ($2021 - \overline{1nn1} = \overline{\ldots 0}$). Они не могут быть палиндромами, т.к. в начале числа не может быть 0. Поэтому минимальное кол-во ~~...~~ слагаемых в этом случае — 3. ✓

2) Палиндромы до 1000. ~~...~~ Начнём с ~~...~~ палиндромов, которые имеют вид $\overline{9n9}$, где $n \in [0;9]$. В этом случае в остатке остаются числа, оканчивающиеся на 2 ($\ldots 21 - 9 = \ldots 12$). ~~таких чисел так~~. Таким образом нам нужны числа, которые начинаются на 2, т.е. либо палиндромы $\overline{2n2}$, либо $\overline{2nn2}$, где $n \in [0;9]$. Первые дадут недостаточную сумму, а вторые — избыточную. В этом случае минимальное кол-во слагаемых ~~...~~ больше 3.

Аналогично происходит со всеми палиндромами от 100 и до 1000 ~~...~~. не доказано

Я доказала, что минимальное кол-во слагаемых в выражении, где должны участвовать палиндромы, а сумма итога равна 2021, ~~...~~ три.

ч.т.д.

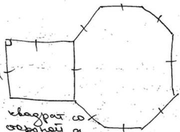
±

Ответ: 3

Задание 2

Центр симметрии — это центр многоугольника, через который можно провести бесконечно много прямых, но относительно каждой прямой многоугольник будет симметричен.

Начну с конца. Возьмём многоугольник, который имеет центр симметрии. Например, квадрат (а также это любой ~~...~~ правильный многоугольник) со стороной а



Теперь можно взять одну сторону ~~на~~ этого квадрата и сделать её местом разреза исходного многоугольника, который мы пытаемся создать.

Второй фигурой, у которой есть центр симметрии, ~~бу~~ будет правильный восьмиугольник со стороной a.

Сделаем так, чтобы одна из сторон квадрата слилась с одной из сторон восьмиугольника. Место слияния и будет местом разреза. Получаем следующий многоугольник

Получившийся многоугольник не имеет центра симметрии. Он имеет одну ось симметрии, но не более.

Таким образом, такой многоугольник существует.

ч.т.д.

Задание 4

$m+\sqrt{n+\sqrt{k}} = 2023$

1) Какие целые значения могут получиться из корневого выражения?

$\sqrt{x} = 2,3,4 \dots 2022$ (2021 штука)

$x = 4, 9, 16 \dots 2022^2$ (2021 штука)

$\sqrt{x}$ не может равняться единице, так как по условию $x = n+\sqrt{k}$, а m, n и $k \in N$.

2) m может равняться 1…2021, т.е. $m \in [1;2021]$

Пусть m - определено, тогда:
m $(2023-m)^2 = $ ~~[illegible]~~ $n+\sqrt{k}$

~~Но! количество способов выбрать n и k тогда будет равно $(2023-m)^2-1$~~

Так для $m = 2021$ будет существовать $(2023-2021)^2-1 = 3$ тройки чисел. Действительно: $m = 2021$, тогда:

$2021+\sqrt{3+\sqrt{1}}$ $n=3$ $k=1$
$2021+\sqrt{1+\sqrt{9}}$ $n=1$ $k=9$
$2021+\sqrt{2+\sqrt{4}}$ $n=2$ $k=4$

Пары $(3$ и $1)$ и $(1$ и $3)$ будут являться разными т.к. ~~[illegible]~~ $n+\sqrt{k}$ - сумма, где ещё и с корнем. Поэтому формула $(2023-m)^2-1$ не работает.

Получается, что кол-во троек, удовлетворяющих условию задачи, будет ~~[illegible]~~ вычисляться следующим выражением:

$$3+8+15+24+35+\ldots+(2021^2-1)$$

Что является суммой квадратов чисел от 2 до 2021, уменьшенных на 1.

$$(2^2-1)+(3^2-1)+(4^2-1)+(5^2-1)+(6^2-1)\ldots+(2021^2-1) =$$
$$= 2^2+3^2+4^2+5^2+6^2 \ldots 2021^2 - 2020$$

Значение этого выражения и будет являться ответом.

Ответ: $(2^2-1)+(3^2-1)+(4^2-1)+(5^2-1)+\ldots+(2021^2-1)$

сумма не досчитана.

Задание 3

a^2, b^2, c^2, d^2 – арифметическая прогрессия

$\frac{1}{a+b+c}, \frac{1}{a+b+d}, \frac{1}{a+c+d}, \frac{1}{b+c+d}$ – арифметическая прогрессия

$$\frac{1}{b+c+d} - \frac{1}{a+c+d} = \frac{1}{a+b+d} - \frac{1}{a+b+c}$$

$$\cancel{\frac{a+c+d-b-c-d}{(b+c+d)(a+c+d)}} = \cancel{\frac{a+b+c-a-b-d}{(a+b+d)(a+b+c)}}$$

$$\cancel{\frac{a-b}{ab+bc+bd+ca+c^2+bc+cd+da+dc+d^2}}$$

$$\cancel{\begin{cases} c^2-b^2=b^2-a^2 \\ \frac{1}{a+b+d}-\frac{1}{b+c+d} \end{cases}} \Leftrightarrow \cancel{2b^2=c^2+d^2}$$

$$\begin{cases} c^2-b^2=b^2-a^2 \\ \frac{1}{b+c+d}-\frac{1}{a+c+d}= \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b^2=a^2+c^2 \\ \frac{a-b}{ab+bc+bd+ca+c^2+cd+da+dc+d^2}= \end{cases}$$

$$=\frac{1}{a+c+d}-\frac{1}{a+b+d}$$

* одинаковую часть обозначу $\bullet$

$$=\frac{b-c}{a^2+ab+ad+ca+cb+cd+da+db+d^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2=2b^2-c^2 \\ \frac{a-b}{c^2+dc+\bullet}=\frac{b-c}{a^2+da+\bullet} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$S_{n1} = \frac{a^2+d^2}{2} \cdot 4 = 2a^2+2d^2$$

$$a^2+b^2+c^2+d^2 = 2a^2+2d^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b^2+c^2 = a^2+d^2$$

$$b^2 = \frac{c^2+a^2}{2}$$

$$b = \sqrt{\frac{c^2+a^2}{2}}$$

$$S_{n2} = \frac{\frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{b+c+d}}{2} \cdot 4 = \frac{b+c+d+a+b+c}{(a+b+c)(b+c+d)} \cdot 2 =$$

$$= \frac{2b+2c+a+d}{(a+b+c)(b+c+d)}$$

...

Задание 5

8×8

	1	2	3	4	5	6	7	8
А	1	2	3	4	5	6	7	8
Б	9	10	11	12	13	14	15	16
В	17	18	19	20	21	22	23	24
Г	25	26	27	28	29	30	31	32
Д	33	34	35	36	37	38	39	40
Е	41	42	43	44	45	46	47	48
Ё	49	50	51	52	53	54	55	56
Ж	57	58	59	60	61	62	63	•

~~1) Пусть первый раз Петя ставит ладью в угол поле с цифрой 64 (чтобы начать с максимума)~~
~~2) Дальше он делает свой первый ход — делает один шаг влево (в цифру 63)~~

~~3) Второй ход: Пет~~

~~1) Вася ставит ладью либо в столбик 8 [illegible], кроме последнего поля с цифрой 64.~~

~~2) Первым ходом Вася перемещает ладью в поле Ж8. Там находится цифра 64.~~

~~3) Вторым ходом Вася~~

Рассмотрим строчку А — где собраны наименьшие из предложенных 64 цифр. Соответственно, наибольшие сумма из восьми этих чисел гарантированно соберётся у Васи. А именно $6+7+8 = 13+8 = 21$

~~Но так как Вася может ходить ещё и по горизонтали, то он сможет собрать~~

Ответ: 21 оценка не верна