ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802504429004

Титульный лист

Направление ☐ информатика ☐ история ■ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ■ 11

Фамилия МЕШКОВ

Имя ВАДИМ

Отчество ОЛЕГОВИЧ

Дата рождения 10 02 2005

Город участия ЧЕБОКСАРЫ

Аудитория 203

Телефон 89877363448

Дата 27 02 2023 **Подпись**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802504429004

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Город участия ЧЕБОКСАРЫ

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с 11:16 до 11:20

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	20	20	8	0					
Балл члена жюри №2	20	20	20	8	0					

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Балл члена жюри №1										
Балл члена жюри №2										

Итоговый балл 68

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

№1

Заметим, что 2021 не палиндром.

Докажем, что случай $n=2$ невозможен и приведём пример $n=3$

Пусть $n=2$, т.е. $a_1 + a_2 = 2021$

Наибольшее $a_1 < 2021$ равно 2002. Затем идут 1991, 1881, 1771, ...

При $a_1 = 2002$ $2021 - 2002 = 19$ - не подходит

При $a_1 = 1991$ $2021 - 1991 = 30$ - не подходит

При $a_1 = 1881$ $2021 - 1881 = 140$ - не подходит

Рассмотрим палиндромы вида $\overline{1xx1}$ где $x \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

тогда $2021 - \overline{1xx1} = (9-x)\cdot 100 + (12-x)\cdot 10 + 0$

Используя эту формулу, рассмотрим все возможные значения a_2 для $a_1 = \overline{1xx1}$

$x=9$, $a_2 = 30$ $x=6$, $a_2 = 360$ $x=3$, $a_2 = 690$

$x=8$, $a_2 = 140$ $x=5$, $a_2 = 470$ $x=2$, $a_2 = 800$

$x=7$, $a_2 = 250$ $x=4$, $a_2 = 580$

Заметим, что все эти числа не явл-ся пал.-ми

Следующее возможное $a_{max} < 1221$ это 1111 при $a_1 = 1111$, $a_2 = 910$ - не подходит

Мы рассмотрели все возможные значения $a_{max} > 1000$, при $a_1 = 999$, $a_2 = 1022 > 1000$. Очевидно, что уменьшая a_1, мы не получим a_2 - палиндром

Приведём пример на $n=3$.

Пусть $a_1 = 1221$, $a_2 = 767$, $a_3 = 33$

$1221 + 767 + 33 = 2021$ - подходит

Ответ: $n=3$ - наим. возм. кол-во слаг-мых

+

№3 $a, b, c, d > 0$

a^2, b^2, c^2, d^2 — образуют арифм. прогрес

$\frac{1}{a+b+c}, \frac{1}{a+b+d}, \frac{1}{a+c+d}, \frac{1}{b+c+d}$ — образ. арифм. прогр.

Не меняя общности рассуждения предположим, что $a<b<c<d$

Тогда $a^2<b^2<c^2<d^2$, $\frac{1}{a+b+c} > \frac{1}{a+b+d} > \frac{1}{a+c+d} > \frac{1}{b+c+d}$

из св-в арифм прогрес следует, что

$c^2 = \frac{b^2+d^2}{2}$ (2)

$$\frac{1}{a+b+d} = \frac{\frac{1}{a+b+c}+\frac{1}{a+c+d}}{2} = \frac{2a+b+2c+d}{2(a+b+c)(a+c+d)} \quad (1)$$

Решим $\frac{1}{a+b+d} = \frac{2a+b+2c+d}{2(a+b+c)(a+c+d)}$

$2(a+b+c)(a+c+d) = (2a+b+2c+d)(a+b+d)$

$2(\cancel{a^2}+\cancel{ab}+ac+ac+\cancel{bc}+c^2+\cancel{ad}+\cancel{bd}+\cancel{cd}) = \cancel{2a^2}+ab+\cancel{2ac}+ad+\cancel{2ab}+b^2+\cancel{2bc}+\cancel{bd}+\cancel{2ad}+\cancel{bd}+$
$+\cancel{2cd}+d^2$

$2ac+2c^2 = ad+b^2+d^2+ab$ заменим $2c^2 = b^2+d^2$

$2ac = ad+ab$

$2c = d+b$

Имеем: $\begin{cases} 2c = d+b \\ 2c^2 = b^2+d^2 \end{cases}$ $\begin{cases} 4c^2 = b^2+d^2+2bd \\ 2c^2 = b^2+d^2 \end{cases}$ $-$ $\Rightarrow$ $2c^2 = 2bd$, $c^2 = bd$

Подставим получ знач в (1):

$2bd = b^2+d^2$

каким образом?

$(b-d)^2=0$ из условия $b>0$ и $d>0 \Rightarrow b=d$, т.е. $b^2=d^2$

Из этого следует что все члены прогрессии равны $a^2=b^2=c^2=d^2$

из условия $a, b, c, d>0 \Rightarrow a=b=c=d$ ч.т.д. $\perp$

№4 ~~известно~~ известно, что $m, n, k \in N$

$m + \sqrt{n+\sqrt{k}} = 2022$

Для пары решений n_0 и k_0 существует только одно знач m_0

Найдём кол-во решений:

Нам достаточно, чтобы выполнялось усл-ие

$n + \sqrt{k} \le 2022^2$, т.е ~~где~~ x

$n + \sqrt{k} = x^2$, где $x \in N$, $2 \le x \le 2022$

$\sqrt{k} = x^2 - n$, т.е $\sqrt{k} \le 2022^2 - n$

~~$\sqrt{k} \in [1, 2022^2-1]$ — всего таких чисел 2022^2-1~~

Т.к $k \in N$, то кол-во $\sqrt{k_0}$ и k_0 — одинаково

$n = x^2 - \sqrt{k}$ — в данном случае для конкретного x и k_0 сущ конкретное n_0

для каждого x сущ $x-1$ пар решений ~~решений~~ k_0 и n_0

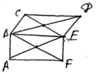
не доказано

Тогда кол-во решений равно $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + 2022^2 - 2022$

Ответ: существует $2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + 2022^2 - 2022$ троек решений

№2 Да, приведём пример.

~~[illegible]~~ Заметим, что исходный многоугольник не обяз не имеющ. центр симм. выпуклый. Приведём пример вогнутого многоугольника, который можно разрезать на многоугольники, ~~не~~ имеющие центр симметрии



ABCDEF – вогнутый многоугольник, не имеющий центра симметрии

ABEF и BCDE – паралл., точка симметрии которых точка пересеч. диагоналей

чтд

№5

Очевидно, что максимальную сумму 64+63+62 – Вася может получить

Вася сам выбирает, куда положить ладью, и за два хода он может добраться до любой точки таблицы. Причём, если ~~два числа~~ в два числа не лежат на одной гор. или верт. у него есть два способа добраться до другого числа.

Тогда он точно сможет набрать 64+2+63 = 129

Ответ: 129 оценка не верна