ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802764336910

Титульный лист

Направление ☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Фамилия КУЗНЕЦОВА

Имя ТАИСИЯ

Отчество АЛЕКСАНДРОВНА

Дата рождения 05 07 2005

Город участия ПЕРМЬ

Аудитория 124

Телефон 79504577915

Дата 27 02 2023 **Подпись**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802764336910

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Город участия ПЕРМЬ

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

Протокол проверки

Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	0	20	15	0					
Балл члена жюри №2	20	0	20	15	0					

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Балл члена жюри №1										
Балл члена жюри №2										

Итоговый балл 55

Подпись члена жюри №1 Dlouf

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

Задание №1

Заметим, что палиндромы, большие 10 и меньшие 2021 могут принимать вид:

двузн: ~~10x~~ ~~211~~. $\overline{xx} = 10x + x = 11x$

трёхзн: $\overline{xyx} = 100x + 10y + x = 101x + 10y$

четырёхзн: $\overline{xyyx} = 1000x + 100y + 10y + x = 1001x + 110y$

Пример: 3 слагаемых – $1771 + 151 + 99 = 2021$ ✓

Почему не может быть двух слагаемых?

Если будут два трёхзн. слагаемых, то их сумма не превышает $999 \cdot 2 = 1998$. Значит, должно быть хотя бы одно четырёхзначное ✓

– Если четырёхзн. число начинается с 2, то оно и заканчивается 2, принимая вид $\overline{2yy2}$

Проверяем два таких числа: 2002 и 2012?

$2021 - 2002 = 19$ – не палиндром

$2021 - 2012 = 9$ – ~~не~~ не подходит, т.к однозначное.

– Тогда возьмём число типа $\overline{xyyx}$: если $x \neq 2$, то $x = 1$ и только ещё. (~~1~~ $x = 0$ не может быть, исходя из логики)

Тогда $\overline{xyyx} = \overline{1yy1}$

НО! если вычитать из 2021 число типа $\overline{1yy1}$, то последняя цифра – 0, а т.к это палиндром, то и первая цифра тоже 0, чего не может быть.

Следовательно, двух слагаемых быть не может, а на 3 слагаемых пример приведён выше.

Тогда минимальное кол-во слагаемых – 3

Ответ: 3 задачи

Одного слагаемого быть не может, т.к 2021 – не палиндром

+

Задание №3

a, b, c, d таковы, что: $\quad a>0,\ b>0,\ c>0,\ d>0$

① a^2, b^2, c^2, d^2 – арифм. прогр.

② $\dfrac{1}{a+b+c}$, $\dfrac{1}{a+b+d}$; $\dfrac{1}{a+c+d}$, $\dfrac{1}{b+c+d}$ – арифм. прогр.

$a \le b \le c \le d$, т.к. $a^2 \le b^2 \le c^2 \le d^2$

Если ② – арифм. прогрессия, то выполняется условие:

$$\underbrace{\frac{1}{a+b+d}-\frac{1}{a+b+c}}_{1}=\underbrace{\frac{1}{a+c+d}-\frac{1}{a+b+d}}_{2}=\underbrace{\frac{1}{b+c+d}-\frac{1}{a+c+d}}_{3}$$

Также пусть $b^2-a^2=c^2-b^2=d^2-c^2=x$ (т.к ① – арифм. пр.)

Тогда:

1) $\dfrac{1}{a+b+d}-\dfrac{1}{a+b+c}=\dfrac{a+b+c-a-b-d}{(a+b+d)(a+b+c)}=\dfrac{c-d}{(a+b+d)(a+b+c)}$

2) $\dfrac{1}{a+c+d}-\dfrac{1}{a+b+d}=\dfrac{a+b+d-a-c-d}{(a+c+d)(a+b+d)}=\dfrac{b-c}{(a+c+d)(a+b+d)}$

3) $\dfrac{1}{b+c+d}-\dfrac{1}{a+c+d}=\dfrac{a+c+d-b-c-d}{(b+c+d)(a+c+d)}=\dfrac{a-b}{(b+c+d)(a+c+d)}$

и 1) = 2) = 3) (т.к арифм. прогрессия

1) = 2): $\dfrac{c-d}{(a+b+d)(a+b+c)}=\dfrac{b-c}{(a+c+d)(a+b+d)}$

$$\frac{c-d}{a+b+c}=\frac{b-c}{a+c+d}$$

$$ac+c^2+cd-ad-cd-d^2=ab+b^2+bc-ac-bc-c^2$$

$$\underbrace{c^2-d^2}_{-x}+ac-ad=\underbrace{b^2-c^2}_{-x}+ab-ac$$

$$ac-ad=ab-ac \quad |:a,\ a\ne0$$

$$c-d=b-c \ \checkmark$$

2) = 3): $\dfrac{b-c}{(a+c+d)(a+b+d)}=\dfrac{a-b}{(b+c+d)(a+c+d)}$

$$\frac{b-c}{a+b+d}=\frac{a-b}{b+c+d}$$

$$a^2+ab+ad-ab-b^2-bd=b^2+bc+bd-bc-c^2-bd$$

$$\underbrace{a^2-b^2}_{-x}+ad-bd=\underbrace{b^2-c^2}_{-x}+bd-cd$$

$$ad-bd=bd-cd \quad |:d,\ d\ne0$$

$a-b=b-c$ V

но: $b-c=c-d \Rightarrow a-b=b-c=c-d=x$

и: $b^2-a^2=c^2-b^2$, тогда:

$(b-a)(b+a)=(c-b)(b+c)$

$-x(b+a)=-x(b+c)$

Если $x=0$, то

$a-b=b-c=c-d=0 \Rightarrow a=b=c=d$

Если $x\neq 0$, то

$b+a=b+c$

$a=c$, но т.к $a\le b\le c\le d$, то $c\le b\le c \Rightarrow b=c$

$a=b=c$

и $d^2-c^2=c^2-b^2$

$(d-c)(d+c)=(c-b)(c+b)$

$-x(d+c)=-x(c+b) \quad |:-x \quad , x\neq 0$

$c+d=c+b$

$d=b \Rightarrow a=b=c=d$

В обоих случаях получается, что $a=b=c=d$ /чтд.

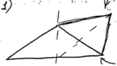
+

задания
2 и 4
на другой
стороне

Задание №2

Да, существует:

1)



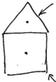
равнобедр. Δ

- по отдельности симметричны

равнобедр. Δ

2)

равност. треугольник



- по отдельности симметричны

квадрат

треугольник не имеет центра симметрии

Задание №4

$m+\sqrt{n+\sqrt{k}}=2023$

m может принимать значения:

$m=2023$ - нет, т.к $\sqrt{n+\sqrt{k}}=0$ $n+\sqrt{k}=0$, $n\in N$, $k\in N$

$m=2022$ - нет, т.к $\sqrt{n+\sqrt{k}}=1$ $n+\sqrt{k}=1$, $n\in N$, $k\in N$

$m=2021$ - да, т.к $\sqrt{n+\sqrt{k}}=2$ $n+\sqrt{k}=4$: $n=3$ $k=4$ $n=1$
$k=1$ $n=2$ $k=9$

$m\in\{1;2021\}$ - да

$m\in N$ $2023\in N \Rightarrow \sqrt{n+\sqrt{k}}\in N \Rightarrow n+\sqrt{k}\in N$,
$n\in N \Rightarrow \sqrt{k}\in N \Rightarrow$

Тогда пусть $\sqrt{k}=r$ $\sqrt{n+\sqrt{k}}=q$

$n+r\in N$

$\sqrt{n+r}=q\in N$

Бланк ответов

~~Сколько решений у уравнения $\sqrt{n+r}=q$, где n, r, q - натуральные?~~
~~$n \in \{1; q^2-1\}$~~
~~$r \in \{1; q^2-1\} \Rightarrow$ решений $q-1$~~

Другими словами, при заданном фиксированном m, нам нужно найти все решения ур-я:

$\sqrt{n+\sqrt{k}}=q$, $q \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$

$\sqrt{n+r}=q$, $q, r, n \in \mathbb{N}$

$n+r=q^2$ - сколько решений у этого уравнения?

Ровно q^2-1, т.к. n принимает значения $\{1; q^2-1\}$, а k в соответствии с фиксированным n принимает значения $\{q^2-1; 1\}$.

Тогда для каждого m, коих у нас 2021, есть $(2023-m)^2-1$ решений.

Тогда всего решений:

Сумма всех $(2023-m)^2-1$, где $m \in \{1; 2021\}$

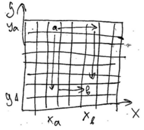
$\sum_{1}^{2023} (2023-m)^2-1$; $m \in \{1; 2021\}$

сумма не досчитана $\pm$

задача №5 на обороте $\rightarrow$

Задача №5

Заметим, что как бы мы не располагали числа a и b на шахматной доске, до них всегда можно добраться за два хода: один ход из $X_a \to X_b$ или $y_a \to y_b$ и второй ход из $y_a \to y_b$ или $X_a \to X_b$ соответственно.



Значит, мы посещаем клетки a и b с максимальными числами и можем сходить в клетку $x_a y_b = c$ или $x_b y_a = d$

Тогда берём $a=63$, $b=64$ — они гарантированно достижимы за два хода и c и d - min
$c=1$, $d=2$

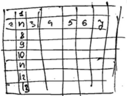
Тогда гарантированная сумма $63+64+2=129$

Если 63 и 64 достижимы за один ход, то в наихудшем случае в столбце, где располагается число c — третье, которое посетит Вася, c принимает значения от 1 до 13, т.к. остаются 13 клеток из 15 возможных доступных ладье.

Тогда min max сумма =>

$63+64+13=127+13=140$

n - посетил



$140>129$ => min гарантированная сумма => 129

Ответ: 129 оценка не верна