ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802607422567

Титульный лист

Направление ☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☒ 10 ☐ 11

Фамилия САЛИМОВ

Имя ЕЛИСЕЙ

Отчество АНДРЕЕВИЧ

Дата рождения 27 12 2006

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Аудитория 700

Телефон +79122560601

Дата 27 02 2023 **Подпись**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802607422567

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☒ 10 ☐ 11

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

Протокол проверки

Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	5	15	3	0					
Балл члена жюри №2	20	5	15	3	0					

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Балл члена жюри №1										
Балл члена жюри №2										

Итоговый балл 43

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

Задача 1

Запишем номера оставшихся страниц до макс. $2^х$ значной страницы:

1, 2, ~~4~~ 5, 6, 9, 10, 13, 14, 17, 18, 21, 22, 25, 26, 29, 30, 33, 34, 37, 38, 41, 42, 45, 46, 49, 50, 53, 54, 57, 58, 61, 62, 65, 66, 69, 70, 73, 74, 77, 78, 81, 82, 85, 86, 89, 90, 93, 94, 97, 98 – эти страницы могли остаться

~~Этих страницах~~ Среди всех этих чисел будет знаков $5 \cdot 1 + (5 \cdot 9) \cdot 2 = 95$ ($2^х$ знач стр.)

Заметим, что все оставшиеся номера страниц – $3^х$ значные, т.к оставшихся страниц – $5 \cdot 90 = 450$ и в сумме ~~все~~ если сущ оставшиеся номера, у которых номер $3^х$ знач, то знаков минимум $5 \cdot 1 + 5 \cdot 9 \cdot 2 + 5 \cdot 90 = > 845$

Значит оставшиеся непосчитанные страницы – $3^х$ значные. Посчитаем кол-во знаков для них – $845 - 5 - 90 = 750$. т.к номера этих стр $3^х$ знач., то страниц здесь – $\frac{750}{3} = 250$

Заметим, что если номер последнего листа – чётный, равен n, то его вырывают, и последним листом становится ~~предпоследний~~ n-1й лист. Заметим, что если последним был n-1й лист, то его не вырывают, и он также будет последним, т.е если в книге осталось k стр, то изначально было 2k или 2(k-1) страниц

Тогда, в нашей книге осталось – $5 + 45 + 250 = 300$ страниц, т.е изначально было $2 \cdot 300 = 600$ или $2(300-1) = 598$ страниц

Ответ: 598 или 600 страниц

Задача 3.

Заметим, что в полученном числе будут использованы все цифры, т.к. оно 10-значное. Также поймём, что если изначально в числе было ≥ 3 одинаковых цифр, то после проделанного действия, мы получим ~~???~~ ≥ 2 одинак. цифр, т.е. чтобы посчитать кол-во особенных 10 знач. чисел надо

Числа, цифры которых различны ① + Числа с ровно двумя одинак. цифрами ②

① все, кроме $1^{ой}$ цифры

9 9 8 7 6 5 4 3 2 1 – таких чисел $9 \cdot 9!$ ✓

все, кроме 0; кроме $1^{ой}$ и $2^{ой}$ ...

② 1) Если одна из одинаковых цифр стоит в начале, то вариантов её выбора – C_9^1 (не 0). Кол-во вариантов выбрать место для $2^{ой}$ такой же цифры – C_9^1 (не на первое место). Кол-во вариантов выбрать оставшиеся цифры – $9!$, т.е.

всего таких чисел – $C_9^1 \cdot C_9^1 \cdot 9! = 81 \cdot 9!$ +

① 9 8 7 6 5 4 3 2

одинак. цифры

а если "0" будет повторяться?

2) Если одинаковые цифры не в начале, то вариантов выбора этой цифры – C_{10}^1, кол-во вариантов выбрать для них место – C_9^2 (кроме начала), кол-во вариантов выбрать оставшиеся цифры – $(8 \cdot 8!)$ т.е.

8 8 7 6 5 4 3 2

кроме одной и 0; один цифры

всего таких чисел – $C_{10}^1 \cdot C_9^2 \cdot 8 \cdot 8! = 80 \cdot \frac{9!}{\cancel{7} \cdot 2} \cdot \cancel{7}^{8} =$

$= 320 \cdot 9!$

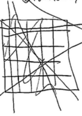
Значит всего особенных чисел – $9 \cdot 9! + 81 \cdot 9! + 320 \cdot 9! = 410 \cdot 9!$

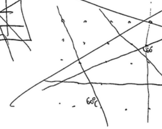
Ответ: $410 \cdot 9!$

Бланк ответов

~~Задача 2.~~

~~Отметим, какие линии мы будем рассматривать. вертикали, горизонтали, диагонали. и прямые, составляю щие с какой-то стороной квадрата угол 60° (см рис).~~

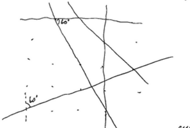




~~Заметим, что посмотрев на вертикали и горизонтали поймём что по принципу Дирихле цветов ≥ 3, т.к. если их < 3, то в вертикали или гор. встретится цвет, повтор~~

Задача 2

Отметим, какие линии мы будем рассматривать - вертикали, гориз, диаг., и прямые, составляющие с какой-то стороной квадрата угол 60° (см. рис.)



Заметим, что посмотрев на вертик. и гориз, поймём, что по принципу Дирихле цветов ≥ 3, т.к. если их < 3, то в каждой верт. или гор. встретится цвет, повтор. минимум 3 раза.

Если цветов 3, то по тому же принципу Дирихле, существует цвет, стоящий в ≥ 9 клетках (если каждый цвет в ≤ 8, то всего $24 < 25$ клеток)

Но надо чтобы в каждой из линий, приведённых ранее, выполнялось условие, что невозможно - обязательно найдется ~~другая~~ линия, в которой есть ≥ 3 клетки одного цвета, даже если ~~этого цвета~~ этот цвет стоит в < 9 клетках нет

А 4 цвета возможно. Пример:

1 2 3 4 1
3 4 1 2 3
2 1 2 1 3
4 3 4 1 2
3 4 2 3 2

Ответ: 4 цвета

Задача 4

$$\begin{cases} a^2 = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} & (1) \\ b^2 = \frac{1}{a} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} & (2) \\ c^2 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{d} & (3) \\ d^2 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} & (4) \end{cases}$$

(1) - (2): $(a-b)(a+b) = \frac{a-b}{ab}$.

Отметим, что $a, b, c, d \neq 0$, ~~а также~~ ~~заметим, что $a=b=c=d=k$, где k-любое, будут являться~~ ~~решением~~.

1) Пусть $a \neq b \neq c \neq d$, т.е. все числа различны, тогда $a-b \neq 0 \Rightarrow (a+b)ab = 1$.

Из оставшихся выражений аналогично получим, что

$\begin{cases} (a+b)ab = 1 \\ (b+c)bc = 1 \\ (b+d)bd = 1 \end{cases} \Rightarrow$ т.к $a, b, c, d \neq 0$ $\begin{cases} (a+b)a = (b+c)c \\ (a+b)a = (b+d)d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a-c)(a+c) = b(c-a) & | : a-c \\ (a-d)(a+d) = b(d-a) & | : d-a \end{cases}$

$\begin{cases} a+c = b \\ b+d = b \end{cases} \Rightarrow c = d$. Противоречит нашему предположению.

2) Пусть $a = b = c = d$. Тогда $a^2 = \frac{3}{a}$; $a^3 = 3$; $a = \sqrt[3]{3}$, т.е. единым решением является $a = b = c = d = \sqrt[3]{3}$

3) Пусть $a = b$, $b \neq c \neq d$, т.е. числа равны a, a, c, d. Тогда

(2) - (3): $(b-c)(b+c) = \frac{b-c}{bc}$, $(b+c)bc = 1$ Аналогично из (3)-(4) и (2)-(4) получим

$(b+c)bc = 1 = (c+d)cd = (b+d)bd$

$(b+c)b = (c+d)d$
$(b-d)(b+d) = c(d-b)$
$-b-d = c$

$(c+d)c = (b+d)b$
$(c-b)(c+b) = d(b-c)$
$-c-b = d$

$-c-d = b$

~~$(2c+2d+2b) = (a+b+c+d)$~~
~~Тогда $b+c+d = 0$~~

$b+c+d = 0$, т.е и $a+c+d = 0$

?

4) если $a = b = c \neq d$, то
$(c-d)(c+d) = \frac{c-d}{cd}$
$(c+d)cd = cd^2 + c^2d = 1 \Rightarrow d = \frac{-c^2 \pm \sqrt{c^4 + 4c}}{2c}$, где $c^4 > -4c$, т.е. $c > \sqrt[3]{-4}$, т. е
Решением будет $a = b = c = k$, где $k > \sqrt[3]{-4}$, $d = \frac{-k^2 \pm \sqrt{k^4+4}}{2k}$. $d \neq 0$, т.к. $k^4 \neq k^4 + 4$.

Бланк ответов

Если $a=b,\ c=d,\ b\neq c$, то

$$\begin{cases} a^2 = \frac{1}{a} + \frac{1}{c} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{2}{c} \quad \Big| \cdot ac \\ c^2 = \frac{2}{a} + \frac{1}{c} \end{cases}$$

$$(a^3-1)c = 2a$$

$$c = \frac{2a}{a^3-1}, \text{ т.е}$$

$$\frac{4a^2}{(a^3-1)^2} = \frac{2}{a} + \frac{a^3-1}{2a}$$