ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802376107956

Титульный лист

Направление ☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Фамилия СТЁЛИН

Имя ДМИТРИЙ

Отчество АРТЁМОВИЧ

Дата рождения 07 11 2005

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Аудитория 43

Телефон 9506462406

Дата 27 02 2023 **Подпись**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802376107956

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	0	5	15	0					
Балл члена жюри №2	20	0	5	9	0					

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Балл члена жюри №1										
Балл члена жюри №2										

Итоговый балл 37

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

№4

$m+\sqrt{n+\sqrt{k}}=2023$, $m,n,k\in N \Rightarrow m,n,k\geq 1 \Rightarrow m\neq$ ~~2023~~ 2023 (иначе n и k должны быть равны нулю). Т.к. $n,k\geq 1$ $\Rightarrow n+\sqrt{k}\geq 1$, $\Rightarrow$ при этом $n+\sqrt{k}$ – квадрат натурального числа, т.е. натур. число ($n+\sqrt{k}$ – квадрат ~~нат~~ нат. числа, т.к. $2023-m$ – нат. число). $n+\sqrt{k}$ – нат число $\Rightarrow \sqrt{k}$ – нат. число $\Rightarrow k$ – квадрат какого-то натур числа.

Заметим, что какое бы $m\in[1;2021]$ ($m\neq 2022$, т.к. тогда $\sqrt{n+\sqrt{k}}=1 \Rightarrow n+\sqrt{k}=1$, что невозможно при нашем условии) мы не взяли, можно взять любое ~~k~~ $k<(2023-m)^4$ (если $k\geq(2023-m)^4 \Rightarrow n+\sqrt{k}\geq n+(2023-m)^2 \Rightarrow$ $\sqrt{n+\sqrt{k}}\geq 2023-m \Rightarrow$ противоречие с равенством) и для него гарантированно подберется единственное число n. Пусть $m=2021 \Rightarrow \begin{cases} k=1^2 \rightarrow n=3 \\ k=2^2 \rightarrow n=2 \\ k=3^2 \rightarrow n=1 \end{cases} \Rightarrow$ будет 3 случая

Аналогично для $m=2020$ $k=1^2, 2^2, 3^2 \ldots, 8^2 \Rightarrow$ будет 8 случаев. ~~из~~ Для $m=2019$ $k=1^2, 2^2 \ldots, 15^2 \Rightarrow$ будет 15 случаев, для $m=2018$ $k=1^2, 2^2 \ldots, 24^2 \Rightarrow$ будет 24 сл. и т.д.. Заметим, что разница между кол-вом случаев $m=2021$ и $m=2020$ $=5$, м/у 2020 и 2019 – 7, м/у 2019 и 2018 – 9, ~~м/у 20~~ и т.д будет разность в виде следующего нечетного числа (11, 13 . .)

Итого в конце будет разность м/у $m=1$ и $m=2$ $=4045$ ($5+2020\cdot 2$, где 2020 – кол-во разностей, 2 – разность м/у разностями). Итоговая сумма будет $3+(3+5)+(3+5+7)\ldots$ Число 3 повт. 2021 раз, 5 – 2020 раз... Тогда сумма будет равна $3\cdot 2021+5\cdot 2020+\ldots$.

+

№ 2

Рассмотрим четырехугольник, вокруг которого нельзя описать окружность => у него нет центра симметрии:

Поделим его на два треуг по диагонали и получим два треугольника

Треугольники априори выпуклые и ~~всегда~~ многогда имеют центр описанной окружности => такой многоуг. подходит => Ответ. да

№ 1

$a_1+a_2+\dots+a_n=2021$, a_i - палиндром для люб $i\in[1;n]$

Очевидно, что „одним слагаемым" не получится, т.к. 2021 - не палиндром. Допустим однозн слаг. начинается на 20 => ед. такое четырехзначное слагаемое - 2002 => 2021-2002=19 - нельзя разложить как палиндромы => слаг. не могут быть больше 1991, как наибольш. палиндром до 2002. Допустим мы хотим сделать сумму из двух слаг. => одно из них гарантированно больше 1000 (иначе сумма будет < 2000) => это слаг. заканч. на 1, т.к. оно палиндром => оставшееся слаг. заканч. на ноль (чтобы на конце так и осталась единица), но это противоречие, т.к. число не может начинаться на ноль => как минимум три слаг. - это могут быть ~~707, 707, 707+707+707+707~~ 101, 919, 1001 (101+919+1001=2021) => будут три задачи минимум

Ответ. 3

N 3

a^2, b^2, c^2, d^2 – обр. ар. прог. , $\frac{1}{a+b+c}$, $\frac{1}{a+b+d}$, $\frac{1}{a+c+d}$, $\frac{1}{b+c+d}$ – арифм. прогр

б.о.о. $a^2 \geq b^2 \geq c^2 \geq d^2 \Rightarrow a \geq b \geq c \geq d$, $b^2+c^2 = a^2+d^2$ (из свойств арифм. прогр.)

$a+b+c \overset{(!)}{\geq} a+b+d \Rightarrow \frac{1}{a+b+c} \leq \frac{1}{a+b+d}$. Аналогично остальные и получим $\frac{1}{a+b+c} \leq \frac{1}{a+b+d} \leq \frac{1}{a+c+d} \leq \frac{1}{b+c+d}$,

$$\frac{1}{a+b+d} + \frac{1}{a+c+d} = \frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{b+c+d}$$

$$\frac{a+b+d+a+c+d}{(a+b+d)(a+c+d)} = \frac{b+c+d+a+b+c}{(a+b+c)(b+c+d)}$$

$$\frac{2a+2d+b+c}{a^2+ac+ad+ab+bc+bd+ad+cd+d^2} = \frac{2b+2c+d+a}{ab+ac+ad+b^2+bc+bd+bc+c^2+cd}$$

Заметим, что, т.к $a^2+d^2 = b^2+c^2$, знаменатели, по сути, можно сравнивать как числа ad и bc (т.к. ост. совпадают). б.о.о пусть $ad > bc$

$\Rightarrow 2ad > 2bc$ Зная, что $a^2+d^2 = b^2+c^2 \Rightarrow (a+d)^2 = (b+c)^2 + \underbrace{2ad-2bc}_{>0}$

$\Rightarrow a+d > b+c$.

$(2a+2d+b+c)(ab+ac+ad+b^2+bc+bd+bc+c^2+cd) =$

$= (2b+2c+d+a)(a^2+ac+ad+ab+bc+bd+ad+cd+d^2)$

$2a^2b + 2a^2c + 2a^2d + 2ab^2 + 2abc + 2abd + \cancel{2abc} + 2ac^2 + 2acd +$

$+ 2dab + 2dac + \cancel{2ad^2} + 2db^2 + 2dbc + 2bd^2 + 2dbc + 2dc^2 + 2cd^2 +$

$+ ab^2 + abc + abd + b^3 + b^2c + b^2d + b^2c + bc^2 + bcd +$

$+ abc + ac^2 + adc + cb^2 + bc^2 + bdc + bc^2 + c^3 + c^2d =$

$= 2ba^2 + 2abc + 2bad + 2ab^2 + 2b^2c + 2b^2d + 2bad + 2bcd + 2bd^2 +$

$+ 2ca^2 + 2ac^2 + 2cad + 2cab + 2bc^2 + 2bcd + 2acd + 2c^2d + 2cd^2 +$

$+ da^2 + adc + abd + ad^2 + dbc + bd^2 + ad^2 + cd^2 + d^3 +$

$+ a^3 + a^2c + a^2d + a^2b + abc + abd + a^2d + acd + ad^2$

Бланк ответов

N3 (продолж.)

$ab^2 + abc + \cancel{abd} + \cancel{b^3} + \cancel{b^2d} + \cancel{bc^2} + \cancel{abc} + ac^2 + \cancel{adc} + \cancel{cb^2} + bdc + \cancel{c^3} + \cancel{c^2d} =$

$= \cancel{da^2} + adc + abd + \cancel{bd^2} + cd^2 + \cancel{d^3} + \cancel{a^3} + a^2c + \cancel{a^2b} + \cancel{abc} + \cancel{abd} + \cancel{acd}$

$+ \cancel{ad^2}$

$\cancel{ab^2} + \cancel{ac^2} + abc + bdc = adc + abd + \cancel{cd^2} + \cancel{a^2c}$

$abc + bdc = adc + abd$ $\quad \frac{abc+bdc}{2} \geq \sqrt{ab^2c^2d}$

$ac(b-d) = bd(a-c)$ $\quad \frac{adc+abd}{2} \geq bc\sqrt{ad}$

(!!) не ясен переход

$b=d$, $a=c \Rightarrow a=b=c=d$

№5

Очевидно, что ~~Петя~~ Вася захочет встать на клетку с 64 => Петя (для минимума очков у Васи) расста-вит так, что он сможет след. ходом сходить на мин. числа (1, 2 ..). У Васи вариантов сходить – 14 => такие числа он и расставит, при этом в "для хитрости" поставив 6 и 9 в угол. => в ряду с наименьш. числами он поставит наибольшие оставшиеся

оценка не верна