ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802778428965

Титульный лист

Направление ☐ информатика ☐ история ■ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ■ 11

Фамилия ПАВЛОВ

Имя АНТОН

Отчество ОЛЕГОВИЧ

Дата рождения 27 11 2005

Город участия ЧЕБОКСАРЫ

Аудитория 203

Телефон 89056720055

Дата 27 02 2023 **Подпись** Павлов

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802778428965

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ информатика ☐ история ■ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ■ 11

Город участия ЧЕБОКСАРЫ

Заполняется организаторами

Количество доп. листов 01 Количество черновиков к проверке

Время выхода с 11:03 до 11:08

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	0	20	0	0					
Балл члена жюри №2	20	0	20	0	0					

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Балл члена жюри №1										
Балл члена жюри №2										

Итоговый балл 40

Подпись члена жюри №1 [signature] **Подпись члена жюри №2** [signature]

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

№ 1

Рассмотрим варианты возможных наименьших количеств задач.

1) Предположим, что минимальное количество задач это одна. Тогда единственным слагаемым является число 2021. 2021=2021 — верное тождество, но 2021 не является палиндромом ⇒ одну задачу получить невозможно. ✓

2) Допустим, задачи было две. Поскольку максимальная сумма двух трёхзначных палиндромов меньше 2021 (999+999<2021), то сумма должна состоять из таких слагаемых: одно-четырёхзначное, другое-трёхзначное (почему нельзя 2 четырех значных?) или одно-четырёхзначное, другое - двухзначное. Рассмотрим все четырёхзначные палиндромы, меньшие 2021 и составим небольшую таблицу: в первом столбике будут эти палиндромы, а во втором - их разность с числом 2021, иными словами, во втором столбце будут вторые слагаемые.

палиндром	2021 - палиндром
2002	19
1991	30
1881	140
1771	250
1661	360
1551	470
1441	580
1331	690
1221	800
1111	910
1001	1020

Заметим, что ни одно из вторых слагаемых не является палиндромом ⇒ двух задач тоже не могло быть.

3) Предположим, что ~~[illegible]~~ наименьшее количество задач это три. Рассмотрим максимальный трёхзначный палиндром — 999. Если взять его за слагаемое, то остальные два слагаемых дают в сумме 2021−999=1022. Попробуем представить число ~~[illegible]~~ 1022 в виде суммы двух палиндромов. Для этого рассмотрим все двузначные палиндромы: 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, ~~[illegible]~~ 88, 99. Составим таблицу, где в первом столбце будут находиться двузначные палиндромы, а во втором — разность этого палиндрома и числа 1022.

палиндром	1022 − палиндром
11	1011
22	1000
33	989
44	978
55	967
66	956
77	945
88	934
99	923

Заметим в правом столбце палиндром: 989. Действительно, 999+989+33=2021, причём все три слагаемых — палиндромы ⇒ мы нашли пример, когда студент может получить 3 задачи, а поскольку менее задач получить невозможно (по доказанному ранее), то три задачи — наименьшее количество, которое может получить студент.

Ответ: 3 задачи.

N3

Поскольку a^2, b^2, c^2, d^2 (по условию) сосоставляют арифметическую прогрессию, $b^2-a^2=c^2-b^2=d^2-c^2$.

Аналогично со второй арифметической прогрессией: $\frac{1}{a+b+d}-\frac{1}{a+b+c}=\frac{1}{a+c+d}-\frac{1}{a+b+d}=$

$=\frac{1}{b+c+d}-\frac{1}{a+c+d}$.

Упростим эти равенства, приведя дроби к общему знаменателю

$$\frac{a+b+c-(a+b+d)}{(a+b+d)(a+b+c)}=\frac{a+b+d-(a+c+d)}{(a+c+d)(a+b+d)}=\frac{a+c+d-(b+c+d)}{(b+c+d)(a+c+d)}.$$

$$\frac{c-d}{(a+b+d)(a+b+c)}=\frac{b-c}{(a+c+d)(a+b+d)}=\frac{a-b}{(b+c+d)(a+c+d)}$$

Рассмотрим эти равенства по отдельности.

1) $$\frac{c-d}{(a+b+d)(a+b+c)}=\frac{b-c}{(a+c+d)(a+b+d)} \Big| \cdot a+b+d \neq 0$$

$$\frac{c-d}{a+b+c}=\frac{b-c}{a+c+d}$$

$$(a+b+c)(b-c)=(c-d)(a+c+d)$$

$$ab-ac+b^2-\cancel{bc}+\cancel{bc}-c^2=ac-ad+c^2-\cancel{dc}+\cancel{dc}-d^2 \Big| \cdot(-1)$$

$$-ab+ac+c^2-b^2=-ac+ad+d^2-c^2$$

Поскольку $c^2-b^2=d^2-c^2$ (ранее написано почему),

$$ac-ab=ad-ac$$

$$a(c-b)=a(d-c)$$

$$c-b=d-c.$$

2) $$\frac{b-c}{(a+c+d)(a+b+d)}=\frac{a-b}{(b+c+d)(a+c+d)} \Big| \cdot a+c+d \neq 0$$

$$\frac{b-c}{a+b+d}=\frac{a-b}{b+c+d}$$

$$(a+b+d)(a-b)=(b+c+d)(b-c)$$

$$a^2-\cancel{ab}+\cancel{ab}-b^2+ad-db=b^2-\cancel{bc}+\cancel{bc}-c^2+db-dc \Big| \cdot -1$$

$$b^2-a^2+db-da=c^2-b^2+dc-db.$$

Поскольку $b^2-a^2=c^2-b^2$,

$$db-da=dc-db$$

$d(b-a)=d(c-b)$

$b-a=c-b.$

Следовательно из первого равенства мы получили, что $c-b=d-c$, а из второго, что $c-b=b-a \Rightarrow d-c=b-a$

Учитывая первую арифметическую прогрессию,

$d^2-c^2=b^2-a^2$

$(d-c)(d+c)=(b-a)(b+a)$

Поскольку $d-c=b-a$, составим систему:

$$\begin{cases} d-c=b-a \\ d+c=b+a \end{cases} \Big| +$$

$2d=2b$

$d=b.$

$$\begin{cases} d-c=b-a \\ d+c=b+a \end{cases} \Big| -$$

$-2c=-2a$

$a=c.$

У первой арифметической прогрессии разность $b^2-a^2=c^2-b^2=d^2-c^2$.

А две её разности: $c^2-a^2=d^2-b^2$

$(c^2-a^2)=(d^2-b^2)$

$c^2-a^2=d^2-b^2=0$ (поскольку $a=c$ и $d=b$)

$\Downarrow$

разница у арифметической прогрессии равна нулю

$\Downarrow$

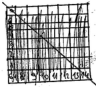
$b=a, c=d$

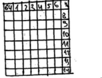
$a=b=c=d.$

ч.т.д.

№5

В качестве начальной клетки выгоднее всего будет выбрать ту, в которой будет находиться число 64 (почему?). Рассмотрим гарантированную сумму при такой стратегии, показав один из возможных вариантов расстановки чисел:





Остальные клетки нет смысла рассматривать, т.к. мы не сможем определить гарантированный выигрыш. Базируясь на чертеже первая точка будет 64, вторая – 7, а третья – 14. Следовательно, максимальный гарантированный вариант суммы это 85.

Ответ: 85. нет

№4

Пусть, $p=\sqrt{n+\sqrt{k}}$. Поскольку m, n, k – натуральные (по условию), максимальное значение, которое может принимать p – 2022, а минимальное – 2 (p не может быть единицей, т.к. $n\geq 1$ и $k\geq 1 \Rightarrow n+\sqrt{k}>1$). Докажем, что p может принадлежать отрезку $[2;2022]$. Для того чтобы сделать p нужным числом, надо подобрать ближайшее число к p^2 (это значение будет принимать k), являющееся квадратом другого числа, а их разницу будет принимать число n. Тогда, количество вариантов можно взять из отрезка чисел, которые будут в сумме представлять n и k. $n+\sqrt{k}\in[2^2;2022^2]$. А само количество будет $2022^2-2^2+1=(2022-2)(2022+2)+1=2020\cdot 2024+1=4088480+1=4088481$.

Ответ: 4088481.

N 2

Если взять центры симметрии фигур, которые получились в результате разреза и провести через них прямую, то отрезок, являющийся частью прямой, заключенной в исходный многоугольник будет разбивать эту фигуру на две не обязательно одинаковых => они будут расположены симметрично => этот отрезок будет являться линией симметрии => он будет проходить через центр симметрии исходного многоугольника => у него есть центр симметрии. Значит, таких многоугольников, не имеющих центр симметрии, которые можно разрезать на два выпуклых многоугольника, имеющих центр симметрии не существует.

Ответ: нет.