ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802589472403

Титульный лист

Направление	☐ информатика	☐ история	☒ математика
	☐ обществознание	☐ русский язык	☐ физика
	☐ химия		

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Фамилия СКОБЕЛИН

Имя ПАВЕЛ

Отчество КОНСТАНТИНОВИЧ

Дата рождения 09 06 2005

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Аудитория 622

Телефон +79827412925

Дата 27 02 2023 **Подпись**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802589472403

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ информатика ☐ история ☒ математика
☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика
☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Заполняется организаторами

Количество доп. листов 01 Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	20	20	17	0					
Балл члена жюри №2	20	20	20	19	0					

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Балл члена жюри №1										
Балл члена жюри №2										

Итоговый балл 78

Подпись члена жюри №1 **Подпись члена жюри №2**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

Покажем, что студенту надо будет решить минимум 3 задачи

Пусть есть пример с <3; $\Rightarrow$ в нем 1 или 2.

если 1, то 2021 само явл. палиндромом, что неверно. +

если 2.
очевидно тогда, что среди этих 2-х палиндромов хотя бы одно четырехзначное число, т.к. иначе числа <1000, $\Rightarrow$ их сумма $< 2000 < 2021$.

$\Downarrow$
одно из палиндромов четырехзначное +
пусть его первая цифра больше двух, тогда очевидно он $\geq 3000 > 2021$.

пусть 1-я цифра 2. тогда если 2 цифра ≥ 1, то само число $\geq 2112 > 2021$.

$\Downarrow$
2 цифра 0. $\Rightarrow$ палиндром 2002 $2002 + x = 2021$;
$\Rightarrow x = 2021 - 2002 = 19$ — не палиндром. +

$\Downarrow$
1-я цифра палиндрома — 1.

$\Downarrow$
палиндром имеет вид
$\overline{1xx1}$, где $0 \leq x \leq 9$.

Пусть 2-й палиндром имеет длину 2; => имеет вид

$\overline{yy}$.

=> $\overline{1xx1} + \overline{yy} = 2021$

$1\cdot10^3 + x\cdot10^2 + x\,10^1 + 1\cdot10^0 + y\cdot10^1 + y\,10^0 = 2021$

$1001 + 110x + 11y = 2021$

~~Значит~~ $11(91 + 10x + y) = 2021$.

x, y – целые; левая часть $\vdots\, 11$ => правая часть должна $\vdots\, 11$; но $2021 \not\vdots\, 11$ => такого не может быть.

Если 2-й палиндром имеет длину 3!

=> имеет вид $\overline{yzy}$, где $0 \le y, z \le 9$ и $y \ge 1$.

$\overline{1xx1} + \overline{yzy} = 2021$

$\Downarrow$

$\overline{yzy} = 2021 - \overline{1xx1} \equiv_{10} 1 - 1 \equiv_{10} 0$

=> $\overline{yzy}\ \vdots\, 10$ => имеет 0 на конце; очевидно, палиндром не может иметь 0 на конце, т.к. при развороте 0 исчезнет!

=> нельзя представить 2021 в виде суммы 1 или 2 палиндромов.

Пример для 3-х:

$2021 = 1551 + 404 + 66$

Значит, ученику придется решить минимум 3 задачи.

Ответ: 3 задачи.

Бланк ответов

№3

Запишем условие арифм прогрессии:

$(1)\ a^2+c^2=2b^2$ и $b^2+d^2=2c^2$ (2)

Ж Все числа >0, $\Rightarrow a+b+c>0$, и все суммы >0.

для второй прогрессии:

$(3)\ \frac{1}{a+b+c}+\frac{1}{a+c+d}=\frac{2}{a+b+a}$ и $(4)\ \frac{1}{a+b+d}+\frac{1}{b+c+d}=\frac{2}{a+c+d}$

домножим (3) на $(a+b+c)(a+c+d)(a+b+d)$.

$(a+b+d)\Big((a+c+d)+(a+b+c)\Big)=2(a+b+c)(a+c+d)$

$(2a+b+2c+d)(a+b+d)=2(a+b+c)(a+c+d)$.

$\underline{2a^2}+\underline{2ab}+\underline{2ad}+ab+b^2+bd+\underline{2ac}+\underline{2bc}+\underline{2cd}+ad+bd+d^2=$

$=\underline{2a^2}+2ac+\underline{2ad}+\underline{2ab}+\underline{2bc}+2bd+\underline{2ac}+2c^2+\underline{2cd}$

*сократим одинаковые с 2 сторон;

$ab+b^2+ad+d^2=2ac+2c^2$ (1)

из (2): $b^2+d^2=2c^2 \Rightarrow ab+ad+\cancel{2c^2}=2ac+\cancel{2c^2}$

$\Rightarrow a(b+d)=a\cdot 2c$

$a\neq 0 \Rightarrow b+d=2c$. (5) +

Аналогично с (4): домножим обе части на

$(a+b+d)(b+c+d)(a+c+d)$

$\Downarrow$

$(a+c+d)\big((b+c+d)+(a+b+d)\big)=2(a+b+d)(b+c+d)$

$(a+2b+c+2d)(a+c+d)=2(a+b+d)(b+c+d)$

$a^2+ac+ad+2ab+2bc+2bd+ac+c^2+cd+2ad+2cd+2d^2=$

$=2ab+2ac+2ad+2b^2+2bc+2bd+2bd+2cd+2d^2$

$a^2+ad+c^2+cd=2b^2+2bd$

из (1). $a^2+c^2=2b^2$ +

$\Rightarrow \cancel{2b^2}+ad+cd=\cancel{2b^2}+2bd \quad \Rightarrow d(a+c)=d\cdot 2b \quad d\neq 0 \overset{(6)}{\Rightarrow} a+c=2b.$

(5) и (6):

$a+c=2b$ и $b+d=2c$ $\Rightarrow$

$\Downarrow$

a, b, c, d - арифм. прогр.

пусть $b-a=d_1$, $\Rightarrow c-b=d_1$.

a^2, b^2, c^2, d^2 - арифм. прогр, $\Rightarrow$ пусть

$b^2-a^2=d_2 \Rightarrow c^2-b^2=d_2$

$\underbrace{(b-a)}_{=d_1}(b+a)=d_2 \quad \underbrace{(c-b)}_{=d_1}(c+b)=d_2 \Rightarrow$

$d_1\cdot(a+b)=d_2$ и $d_1\cdot(c+b)=d_2$

$\Rightarrow$ или $d_1=d_2=0$, $\Rightarrow$ $a=b=c=d$ (т.к. арифм. прогр. с шагом 0);

или $d_1, d_2\neq 0$;

$\Rightarrow a+b=\dfrac{d_2}{d_1} \quad c+b=\dfrac{d_2}{d_1} \quad \Rightarrow a+\cancel{b}=c+\cancel{b} \Rightarrow a=c \Rightarrow d_1$ все таки 0, (т.к. $c=a+2d_1$)

$\Rightarrow a=b=c=d.$

Что и требовалось д-ть. +

№4

$m + \sqrt{n+\sqrt{k}} = 2023$

$\sqrt{n+\sqrt{k}} = 2023 - m$.

возведем в квадрат и запишем ОДЗ

лев. часть - корень, ~~из натурального~~, очев. он $\neq 0$, т.к. n, k - натуральные.

$\Rightarrow$ $2023 - m > 0$

$n + \sqrt{k} = (2023 - m)^2$

Аналогично:

$\sqrt{k} = (2023 - m)^2 - n$

ОДЗ: $(2023 - m)^2 - n > 0$

$k = ((2023 - m)^2 - n)^2$. из этого равенства очевидно что для пары n, m, подходящей под ОДЗ, сущ. единственное k, и оно всегда будет натуральное;

(т.к. $(2023 - m)^2$ - натур, >0, $(2023-m)^2 - n$ - натур >0).

$\Rightarrow$ нужно найти кол-во пар (n, m), подх. под ОДЗ

$2023 - m > 0 \Rightarrow m < 2023 \Rightarrow m \leq 2022$

$(2023 - m)^2 - n > 0 \Rightarrow n < (2023 - m)^2$

$\Rightarrow n \leq (2023 - m)^2$ ← Наверно -1 потерялась?

Также $n, m \geq 1$; $\Rightarrow$ $1 \leq m \leq 2022$ и $1 \leq n \leq (2023 - m)^2 - 1$.

Может ли $m = 2022$? Ведь тогда $\sqrt{n + \sqrt{k}} = 1$

Может ли $n + \sqrt{k} = 1$?

Теперь для каждого m из диапазона найдём кол-во решений для n, и сложим все варианты

очев для фикс. m, у n: $(2023-m)^2-1$ решений. ч.т.к. $(2023-m)^2-1 \geq 0$

Значит, про сумм для всех m:

$(2023-1)^2-1 + (2023-2)^2-1 + \ldots + (2023-2022)^2-1 =$

$= 2022^2-1 + 2021^2-1 + \ldots + 1^2-1 = 1^2+\ldots+2022^2 - 2022.$

по формуле суммы квадратов:

$$1^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\Rightarrow 1^2+2^2+\ldots+2022^2 = \frac{2022\cdot(2022+1)(2\cdot 2022+1)}{6} =$$

$$= \frac{2022\cdot 2023\cdot(4044+1)}{6} = \frac{2022\cdot 2023\cdot 4045}{6} = 337\cdot 2023\cdot 4045$$

$\Rightarrow$ ответ:

$337\cdot 2023\cdot 4045 - 2022 = 2023\cdot 1362065 - 2022 =$

$2755457495 - 2022 = 2755455473$

допущена арифметическая ошибка при подсчете ответа :(

Ответ: 2755455473 +.

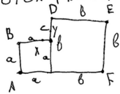
Дополнительный лист N1

N2

Существует.

Очевидно, квадрат имеет центр симметрии (центр пересечения диагоналей);

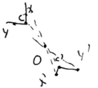
Тогда рассм. такую фигуру:



— два квадрата, соед. показанным образом. Очевидно, ее можно разрезать на 2 выпуклых многоугольника, имеющих центр симм.; докажем, что это не имеет центра симметрии.

Пусть имеет; тогда он находится внутри ~~квадр~~ фигуры (если нет, то при симм. все точки не обязательно все будут уходить за фигуру).

Тогда рассм. точки C, X, Y, где X ∈ BC ~~и близко к C~~, Y ∈ CD; ~~и близко к C~~. Рассм. симметрию XCY отн. O



Очевидно, что тогда в фигуре должен быть другой внутр. угол 270°. (т.к. $\angle XCY = 270^\circ \Rightarrow \angle X'C'Y' = 270^\circ$), но такого в фигуре нет; (все углы или 90°, или 180° (если рассм. прямую));

$\Rightarrow$ у этой фигуры нет центра симметрии $\Rightarrow$ сущ. фигура с указ. условиями.

Ответ: существует. ±

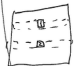
N5.

Докажем, что макс сумма Васи — 135.

Для начала покажем, как на любой доске набрать эту сумму

Ok

~~Пусть~~ ~~осн~~ назовем набор целых чисел $\in [57, 64]$ — основным. Довольно очевидно, что если хотя бы 3 числа из осн. набора окажутся в 1 строке, то мы наберем 134, или же 64 окажется хотя бы ≤ 57, 63 — ≤ 58, и т.д. (почему?) если ~~бы~~ 2 числа с суммой ≥ 121 окажутся в 1 строке, тогда:



Поймем, что как 3-е число мы можем выбрать любое число из выделенной области: или мы пройдем $1 \to 2 \to x$, или $2 \to 1 \to x$, где $x \in$ ⋯.

Очевидно, что там 14 чисел $\Rightarrow$ макс. число там хотя бы 14,

$\Rightarrow 57, 121 + 14 \geq 135.$

~~Пусть тогда очевидно все основные числа стоят~~

Пусть не так, тогда на пересеч. 63, 64 оба числа $< 135 - 63 - 64 = 8$

на пересеч. 64 и 62: 2 числа < 9

и т.д.

Проделав такое для всех осн. чисел, получ. противоречие.

Ответ: 135 —