ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802397016730

Титульный лист

Направление ☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Фамилия ГУБАНОВ

Имя ГЕОРГИЙ

Отчество ИВАНОВИЧ

Дата рождения 11 05 2005

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Аудитория 628

Телефон 89122534654

Дата 27 02 2023 **Подпись** Губ

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802397016730

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Заполняется организаторами

Количество доп. листов 1 Количество черновиков к проверке 0

Время выхода с : до :

Протокол проверки

Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	20	20	20	0					
Балл члена жюри №2	20	20	20	20	0					

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Балл члена жюри №1										
Балл члена жюри №2										

Итоговый балл 80

Подпись члена жюри №1 [signature]

Подпись члена жюри №2 [signature]

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Задание № 1

Оценка.

1 не может, т.к. 2021 не палиндром.

~~Почему~~ Почему не может 2?

~~Наибольший~~ Наибольший палиндром который может исп. 2002, но $2021-2002=19$ не палиндром, при этом пускай от пр. мы разложили 2021 на сумму 2 палиндромов, тогда хотя бы один из них вида $\overline{a_1a_2a_2a_1}$, четырзнач., т.к. $\overline{a_1a_3a_1}+\overline{a_2a_4a_2}<1000+1000<2021$, при этом у палиндрома $\overline{a_1a_2a_2a_1}$, $a_1 \neq 2$ и $a_1<3 \Rightarrow a_1=1$ из начала (т.к. 2002, ед. палинд. $a_1=2$ и не подх.)

Тогда 3 случая ① либо $\overline{1a_2a_21}+\overline{a_3a_4a_4a_3}$, тогда $a_3=1$ и ✗ т.к. в конце будет 2, а у 2021 в конце 1.

② либо $\overline{1a_2a_21}+\overline{a_4a_3a_4}$, тогда т.к. $2021\equiv_{10}1$, то $a_4\equiv_{10}$ ($a_4\le 9 \Rightarrow a_4=0$) а число то 3-х значное $\Rightarrow$ снова ✗

③ $\overline{1a_2a_21}+\overline{a_3a_3}$, опять же $2021\equiv_{10}1 \Rightarrow 1+a_3\equiv_{10}1 \Rightarrow a_3\equiv_{10}0$ ✗, т.к. $a_3<10$ и $a_3\neq0 \Rightarrow$ такой суммой тоже не получить, однозначн. не используем $\Rightarrow$ из 2 палиндр. 2021 не получить, нужно хотя бы 3.

Пример на 3:

$1551+404+66=2021$

+

Ответ: 3 задачи.

Задача № 3

a^2, b^2, c^2, d^2 – ар. пр. $\Rightarrow$

$b^2 = \frac{a^2+c^2}{2} \quad 2b^2 = a^2+c^2$ (3)

$c^2 = \frac{b^2+d^2}{2} \quad 2c^2 = b^2+d^2$ (4)

$\frac{1}{a+b+c} \quad \frac{1}{a+b+d} \quad \frac{1}{a+c+d} \quad \frac{1}{b+c+d}$

(1) $\frac{1}{a+b+d} = \frac{\frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{a+c+d}}{2}$ (2) $\frac{1}{a+c+d} = \frac{\frac{1}{a+b+d} + \frac{1}{b+c+d}}{2}$

(1) $\frac{1}{a+b+d} = \frac{a+b+c+a+c+d}{\cancel{(a+c+d)(a+b+c)}\, 2}$! числа пол. $\Rightarrow$ числ. >0, можем перевернуть др.

$2((a+c)+d)((a+c)+b) = (a+b+d)(2(a+c)+(b+d))$

$2(a+c)a+(b+d)a + \cancel{2(a+c)(b+d)} + (b+d)^2 = 2(a+c)^2 + 2bd + \cancel{2(a+c)(b+d)}$

$\cancel{2a^2} + \cancel{2ac} + ab + da + b^2 \cancel{+2bd} + d^2 = \cancel{2a^2} + 4ac + 2c^2 \cancel{+2bd}$ из (4)

$ab+ad = 2ac \Rightarrow b+d = 2c$

(2) аналогично

$((a+c)+d)((a+c)+2(b+d)) = 2((b+d)+a)((b+d)+c)$

$(a+c)^2 \cancel{+2(b+d)(a+c)} + (a+c)d + 2(b+d)d = 2(b+d)^2 + 2ab + \cancel{2(b+d)(a+c)}$

$a^2 \cancel{+2ac} + c^2 + ad + cd \cancel{+2bd} \cancel{+2d^2} = 2b^2 + 4bd \cancel{+2d^2} \cancel{+2ac}$ из (3)

$ad+cd = 2bd \Rightarrow a+c = 2b$

$a+c = 2b \Rightarrow a^2+2ac+c^2 = 4b^2 \Rightarrow ac = b^2$, аналогично $bd = c^2 \Rightarrow$

$ad = bc$, также $a+d = b+c$

Возьмем $\begin{cases} a+c = b+b \\ a^2+c^2 = b^2+b^2 \end{cases}$ из (3) пусть $a \neq b \neq c \Rightarrow$ Б.О. $a<b;\ c>b$, тогда $a = b-\Delta x \Rightarrow c = b+\Delta x$

Тогда $(b-\Delta x)^2 + (b+\Delta x)^2 = b^2 \cancel{-2\Delta x b} + \Delta x^2 + b^2 + \cancel{2\Delta x b} + \Delta x^2 = 2b^2$,

только если $\Delta x = 0 \Rightarrow a = b = c$, ~~аналогично~~ при этом

$b^2+d^2 = 2c^2 \Rightarrow d^2 = c^2 \Rightarrow d = c$, т.к. все $>0 \Rightarrow a=b=c=d$

ч.т.д.

+

$m+\sqrt{n+\sqrt{k}}=2023$ $m;n;k\in\mathbb{N}\Rightarrow\sqrt{n+\sqrt{k}}$ – тоже натур. т.к. m и $2023\in\mathbb{N}$, тогда $\sqrt{n+\sqrt{k}}\in\mathbb{N}$, т.к. $\Rightarrow n+\sqrt{k}=b^2$

~~если~~ $\underset{0}{n}+\underset{0}{\sqrt{k}}>0$, если иррац. или дробное, то после извлечения корня будет иррац. или дробным $\Rightarrow n+\sqrt{k}=b^2$ $b\in\mathbb{Z}$ $n\Rightarrow k=a^2$

аналогичные рассуждения для k, если k ~~$\notin$~~ a^2 $a\in\mathbb{Z}$ ~~$\in\mathbb{N}$~~, то $\sqrt{k}$ ~~такое~~ $\notin\mathbb{N}$ * ~~$\Rightarrow k\in\mathbb{N}$~~ т.к. получим иррац. или дробь $\Rightarrow k$ имеет вид $k=a^2$.

* Пусть $\sqrt{k}=a$ $a\in\mathbb{N}$
$n+a=b^2$ $\Rightarrow$ $k=a^2$

~~Тог~~ есть нужны тройки

$m>0$ $n>0$ $k=a^2>0$ и ~~$\sqrt{\ }$~~ $n+a=b^2$ $m+\sqrt{n+\sqrt{a^2}}=2023$

Какие значения принимает b? $m>0\overset{m+b=2023}{\Rightarrow} b\leq2022$, ~~из~~ т.к.

$n\geq1$, $a\geq1\Rightarrow 2\leq b\leq2022$ ~~тогда для каждого~~

Какие значения принимает a? $n\geq1\Rightarrow$ ~~1~~ $a\leq b^2-1$

$\Rightarrow$ для каждого b, ~~а так~~ может принимать b^2-1 значение

Тогда считаем общ. кол-во

$b=2$ $n+a=4\Rightarrow a=1;2;3$ 2^2-1 значений

$b=3$ $n+a=9\Rightarrow a=1\dots9$ 3^2-1 значений

$b=k$ $n+a=k^2\Rightarrow a=1\dots k^2-1$ k^2-1 значений

$b=2022$ $n+a=2022^2\Rightarrow a=1,\dots2022^2-1$ 2022^2-1 значений

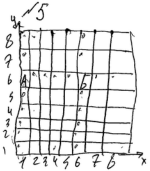
добавим вычтем

$(2^2-1)+(3^2-1)+$ ~~2022^2~~ $+\dots+(2022^2-1)=2^2+3^2+\dots+2022^2-2021=$

$\underbrace{1^2+2^2+\dots+2022^2}_{\sum \text{первых кв.}=\frac{n\cdot(n+1)(2n+1)}{6}}-2022=\frac{2022\cdot2023\cdot4045}{6}-2022=\underline{2757680773}$

+

№5



Изначально Петя поставил ладью и она стоит на 1 из клеток и хочет переместить на ещё 14, потом ладья увидит и сможет переместиться ещё на 7 новых клеток и ~~3 ходам ещё 8 новых клеток~~ ~~...~~

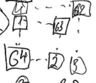
~~Всего есть~~ Пусть стояла в А, могла переместиться в $(1;y);(x;6) \Rightarrow 14$ кл., пусть встала в Б, теперь она может перемест. в $(6;y);(x;6)$, то есть только 7 новых клеток. ~~всего есть возможность~~

Банальные оценки:

(1)

$64+63+2=129$ — min

(2)

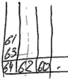


$62+64+4=\underline{130}$

~~? Ладьи~~

Идея: оценить снизу по Дирихле мат. коэф. для каждой клетки = числов клетке + max сосед по стр. и столбцу

~~Сумма мин~~ Минимальна сумма мат коэф. это сумма всех чисел и ~~$64\cdot14+\ldots+49\cdot14$~~ по min больших, то есть при расп.



$64\cdot14+63\cdot7+62\cdot6+61\cdot6+60\cdot5+59\cdot5+58\cdot4+57\cdot4+56\cdot3+55\cdot3+54\cdot2+53\cdot2+52\cdot1+51\cdot1=$

$=3780$

Бланк ответов

$$3780 + \frac{64 \cdot 69}{2} = 3780 + 1480 =$$

$= 5280$

$\underline{5280 : 64} = 82,5 \Rightarrow$ точно будет клетка

с ~~мат~~ мат коэф хотя бы 83.

$8?$ $83 + 64 = 147$

Вариантов ходов: $6\underline{4 \cdot 14 \cdot 14}$ дальнейших продвижений по этой задаче нет

Задача №2

Существует.

2 квадрата | сторона большого = 100
маленького = 1

разобьём на 2 квадра у обоих центр. симм. пересеч. диагоналей

заметим, что у данн. многоугольника нет даже оси симметрии
Докажем почему? Это от противного пусть есть, тогда должна проходить ~~через оба квадрата иначе~~ через какой то угол, т.к. всего углов 7 и если не через угол то с одной стороны ~~будет 4 угла, а с другой 3∠~~, т.к. будет очевидно несимметрично ⇒ ось должна проходить через какой-то угол, причём только через 1 иначе будет 2∠ и 3∠
Так же ось должна проходить через маленький квадрат и через большой. Пусть не пр. через большой тогда
⇒ можно через большой, пусть не пр. через маленький

на мал. кв. 3 угла,

Дополнительный лист № 1

Задача № 2

Существует

2 квадрата со стор. 100 и 1
разобьём на 2 кв. у обоих центр. симм. пересеч. диаг.

Заметим, что у многоуг. нет даже оси симм. От пр. пусть есть, тогда проходит через оба квадрата.

① Пусть прох. через мал., но не через большой, тогда

$S_2 \geq 10^4$ $S_1 \leq 1$ ⇒ через большой точно прох.

② Пусть не прох. через мал., тогда в большом кв. ось должна

~~у мал. квадрата 3 угла~~ отсечь часть фигуры

но нужно хотя бы 2 прямых для этого ⇒ и через мал. проходит ось.

Пусть проходит так:

, т.к. область закрыта с одной стороны, а с другой открыта ⇒ если ось и есть то она не перес. стороны FE и DE одновременно

⇒ при ~~...~~ сохраняется с одной стороны $\angle FED$, он внешний и равен $90°$, а чтобы сделать такой же сим. угол в другой части многоуг.

нужно хотя бы 2 прямых, а ось 1 ⇒ нет оси симметрии, а значит и нет центра симм. ⇒ Многоугольник подходит ч.т.д.