ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802119353659

Титульный лист

Направление	☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия
Класс	☐ 8 ☐ 9 ☒ 10 ☐ 11
Фамилия	ДАВИДЕНКО
Имя	ИЛЬЯ
Отчество	ОЛЕГОВИЧ
Дата рождения	19 11 2006
Город участия	КАЛИНИНГРАД
Аудитория	КЛУБ
Телефон	+79062123087
Дата	27 02 2023
Подпись	

Пример заполнения
А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802119353659

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☒ 10 ☐ 11

Город участия КАЛИНИНГРАД

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	12	0	0	15	0					
Балл члена жюри №2	12	0	0	15	0					

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Балл члена жюри №1										
Балл члена жюри №2										

Итоговый балл 27

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

№1

Запишем номера страниц нечетных листов в парах: (1,2), (5,6), (9,10).. . Заметим, что у таких пар есть закономерность. У следующей пары первое число больше, чем у предыдущей на 4, такое же свойство есть и у второго числа из пары. Действительно, если записать в общем виде получим $(n, n+1), (n+4, n+3), (n+4; n+5) \Rightarrow$ для всех пар действует такое свойство $\Rightarrow$ Рассмотрим второе число из такой пары: пока второе число меньше 100, то в паре каждое число обладает 2-мя цифрами, кроме пар (1,2), (5,6), (9,10) $\Rightarrow$ посчитаем количество пар, в которых второе число не превосходит 100: $2+4n \le 100 \Rightarrow 2n \le 99$ $n \le 49 \Rightarrow$ $n=49$, но есть также 1-вая пара $\Rightarrow$ $m=n+1=50 \Rightarrow$ число цифр у таких пар $50 \cdot 4 - 5 = 95$ Первая пара, у которой числа являются 3-ми (101,102) $\Rightarrow$ Заметим, что если среди страниц есть обладающие 4-ним порядковым номером, то сумма цифр будет больше $845 \Rightarrow 95 + 6k = 845$, где k - количество листов с 3-ним номером страниц $\Rightarrow k = 125 \Rightarrow$ количество нечетных листов = неверно 175, но четных листов может быть на 1 больше или на 1 меньше, чем нечетных $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} S_1 \text{(общее кол-во листов)} = 175 \cdot 2 + 1 = 326 \\ S_2 = 175 \cdot 2 - 1 = 324 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a_1 \text{(кол-во страниц)} = 2S_1 \\ a_2 = 2S_2 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} a_1 = 654 \\ a_2 = 648 \end{array}\right.$

I

Ответ: страниц изначально 654 или 648

№3

Разделим особенные числа на 2 группы. В первой группе – числа, у которых ~~чис~~ цифры изначально различны, во второй группе – числа, у которых необходимо заменить 1 цифру так, чтобы все цифры были различными

В первой группе на месте первой цифры может стоять 9 различных чисел (все кроме 0), на 2-ом месте - оставшиеся 9, на 3-ем - 8 и т.д.
S_1 - кол-во таких чисел, $S_1 = 9 \cdot 9!$ ✓

Во второй группе есть только 2 схожих цифры $\Rightarrow$ если, например 1 - повторяется 2 раза, то если посчитать количество таких чисел по формуле для первой группы будут учитываться также всевозможные перестановки между друг другом $\Rightarrow$ S_2 (кол-во чисел во второй группе) $= \frac{9 \cdot 9!}{2} \cdot 10$ (происходит домножение на 10, так как существует ровно 10 цифр, которые могут повторяться)

неверная формула для подсчёта

S (кол-во особенных чисел) $= S_1 + S_2 = 9 \cdot 9! \cdot 6 = 54 \cdot 362880 = 19596520$

Ответ таких чисел 19596520

№ 4

Вычтем почленно каждое уравнение из каждого уравнения и получим

$$\begin{cases} (a-b)(a+b-\frac{1}{ab})=0 \\ (a-c)(a+c-\frac{1}{ac})=0 \\ (a-d)(a+d-\frac{1}{ad})=0 \\ (b-c)(b+c-\frac{1}{bc})=0 \\ (b-d)(b+d-\frac{1}{bd})=0 \\ (c-d)(c+d-\frac{1}{cd})=0 \end{cases}$$

Каждое из этих уравнений распадается на 2 возможных. Так как они все симметричны относительно друг друга, то получив одну четверку будет необходимо переставить каждый член такой четверки всеми возможными способами. Предположим, что $a=b \Rightarrow$
Если $a=c$, то $c \neq d$ $\begin{cases} d^2 = \frac{3}{a} \\ a^2 = \frac{2}{a} + \frac{1}{d} \end{cases} \Rightarrow d = \frac{a}{a^3-2} \Rightarrow$

$$\begin{cases} a^2 = \frac{1}{a} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \\ c^2 = \frac{2}{a} + \frac{1}{d} \\ d^2 = \frac{2}{a} + \frac{1}{c} \end{cases}$$

$\frac{a^2}{(a^3-2)^2} = \frac{3}{a} \Rightarrow \frac{a^3}{(a^3-2)^2} = 3$

$a+d = \frac{1}{ad}$, $a^3 = t \Rightarrow$
$t = 3t^2 - 12t + 12 \Rightarrow 3t^2 - 13t + 12 = 0$ $D = 169 - 144 = 25$

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = \frac{13+5}{6} = 3 \\ t_2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} a_1 = \sqrt[3]{3} \\ a_2 = \sqrt[3]{\frac{4}{3}} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} d_1 = \sqrt[3]{3} \checkmark \\ d_2 = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{4}{3}} \checkmark \end{array}\right.$$

$c^2d + d^2c - 1 = 0$
$D = d^4 + 4d \Rightarrow c = \frac{-d^2 \pm \sqrt{d^4+4d}}{2d} = -\frac{d \pm \sqrt{d^2 + \frac{4}{d}}}{2}$

Если $a \neq c$, то $\begin{cases} c+d = \frac{1}{cd} \\ c+a = \frac{1}{ac} \\ d+a = \frac{1}{ad} \end{cases}$ $\begin{cases} c^2d + d^2c = 1 \\ c^2a + a^2c = 1 \\ d^2a + ad^2 = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} ad^2+a^2d-1=0 \\ a^2\left(\frac{-d\pm\sqrt{d^2+\frac{4}{d}}}{2}\right)+a\left(\frac{-d\pm\sqrt{d^2+\frac{4}{d}}}{2}\right)^2=1 \end{cases} \Rightarrow a=\frac{-d\pm\sqrt{d^2+\frac{4}{d}}}{2}, \text{ но } a\neq c \Rightarrow a=\frac{-d-\sqrt{d^2+\frac{4}{d}}}{2}$$

$$c=\frac{-d+\sqrt{d^2+\frac{4}{d}}}{2}$$

$$a^2c+ac^2=1 \Rightarrow \frac{1}{4}\left(-(d^2-d^2-\frac{4}{d})\right)\left(-d-\sqrt{d^2+\frac{4}{d}}\right)+\frac{4}{d}\left(-d+\sqrt{d^2+\frac{4}{d}}\right)=1$$

$\frac{4}{d}$. $\Rightarrow$ a и c – сопряжённые

$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=-\frac{1}{d}$, но $a^2=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d} \Rightarrow a=0$, что невозможно

Если $c=d$, $a=b$, но $a\neq c$ $\begin{cases} a^2=\frac{1}{a}+\frac{2}{c} \\ c^2=\frac{1}{c}+\frac{2}{a} \end{cases} \Rightarrow a+c=\frac{1}{ac}$

$$a^2+c^2=3\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)$$

$$\Rightarrow a^2+c^2=3a^2+6ac+3c^2 \quad \Rightarrow a^2+3ac+c^2=0 \qquad 3\frac{a+c}{ac}=3(a+c)^2$$

$$a=\frac{-3c\pm c\sqrt{5}}{2} \Rightarrow c^2\frac{(9\pm 6\sqrt{5}+5)}{4}=\frac{2}{-3c\pm c\sqrt{5}}+\frac{2}{c} \Rightarrow \qquad D=9c^2-4c^2$$

$$c^2(14\pm 6\sqrt{5})=2\left(\frac{-2c\pm c\sqrt{5}}{c(-3c\pm c\sqrt{5})}\right) \Rightarrow c^3=\frac{-2\pm\sqrt{5}}{(-3\pm\sqrt{5})(7+3\sqrt{5})} \Rightarrow$$

$$c=\sqrt[3]{\frac{-2\pm\sqrt{5}}{(-3\pm\sqrt{5})(7\pm 3\sqrt{5})}} \qquad a=\sqrt[3]{\frac{-2\pm\sqrt{5}}{(-3\pm\sqrt{5})(7\pm 3\sqrt{5})}}\cdot\left(\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}\right)$$

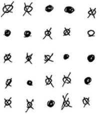
Если ни один из корней не является равным, то это невозможно, так как $\left[\begin{array}{l} a=c \text{ – не подходит} \\ a+c=\frac{1}{ac} \\ a+d=\frac{1}{ad} \Rightarrow \text{один из корне} \\ a+b=\frac{1}{ab} \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ Решением системы являются всевозможные перестановки которые были в решении

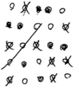
+

№2

По принципу Дирихле если цветов всего 3, то один из цветов обязан встретиться минимум 9 раз, когда в каждой горизонтали может быть максимум 2 точка одинакового цвета ⇒ другой цвет способен встретиться минимум 8 раз ⇒



Приведем случай, когда расположен цвет встречающийся 9 раз, где черные точки — есть цвет. Рассмотрим как в этом случае могут располагаться остальные 2 цвета (цвета минимум 3, так как в противном случае в одной горизонтали будет обязательно 3 одинаковых цвета, что ~~тоже~~ противоречит условию задачи) Крестами зачеркнули точки которые не могут иметь один и тот же цвет



Пусть кресты — другой цвет, белые пропуски — третий

⇒ 3 — максимальное кол-во цветов

нет оценки в общем случае

Бланк ответов