ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802692342466

Титульный лист

Направление	☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия
Класс	☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11
Фамилия	ПОДГОРНОВ
Имя	ИВАН
Отчество	АНДРЕЕВИЧ
Дата рождения	11 07 2005
Город участия	КУРГАН
Аудитория	212
Телефон	89025935984

Дата 27 02 2023 **Подпись** И.Подгорнов

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802692342466

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Город участия КУРГАН

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке 1

Время выхода с : до :

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	20	20	15	0					
Балл члена жюри №2	20	20	20	15	0					

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Балл члена жюри №1										
Балл члена жюри №2										

Итоговый балл 75

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

(1) Т.к. 2021 - не палиндром, то одного слагаемого будет недостаточно. Если предположить, что слагаемых всего два, то наибольшее из них будет четырехзначным, а значит начинаться и заканчиваться либо с 1 либо с 2. Если с 2, то ~~2…2~~ это ~~либо~~ 2002, ~~и~~ т.к 2112 уже > 2021. Но тогда второе число = 2021-2002 = 19 (не палиндром). Если с 1, то последняя цифра - 1, а значит последняя цифра второго числа = 0 (1+0=1), а значит первая цифра второго числа = 0, чего быть не может. => слагаемых минимум 3. Примером такого могут служить числа 1001, 515, 505 :

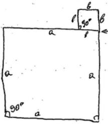
$$\begin{array}{r} +1001 \\ 515 \\ 505 \\ \hline 2021 \end{array}$$

+

Ответ: 3

(2) Квадрат имеет центр симметрии (точка пересеч. диагоналей.

Данная фигура не имеет центра симметрии и её можно разрезать на 2 квадрата



Фигура  не имеет центра симметрии, т.к она имеет угол 270°, который при зеркальном отображении не соответствует никакому другому углу

Ответ: существует

+

③ Рассмотрим функцию $y = x^2$. Для положитель-ных x (т.к. $a, b, c, d > 0$) во всех точках графика производная функция $y' = 2x$ будет больше для больших x. Значит, что приращение функции больше для больших x. Значит равное приращение функции в промежутке между x_0 и x_1 для больших x будет в промежутке с меньшим интервалом. Иными словами $x_1 - x_0$ для больших x будет меньше, чем $x_1 - x_0$ для меньших x

Т.к. a^2, b^2, c^2, d^2 составляют арифмет. прогрессию $\Rightarrow$ $b^2 = a^2 + e$; $c^2 = b^2 + e$; $d^2 = c^2 + e$. Имеет место быть 3-м случаям: 1) $e > 0$, 2) $e < 0$, 3) $e = 0$.

В первом случае $a^2 < b^2 < c^2 < d^2$. Т.к $b^2 - a^2 = e = d^2 - c^2$, следуя вышесказанному $b - a > d - c$. кроме того $a < b < c < d$ (т.к $a, b, c, d > 0$)

Во втором случае $a^2 > b^2 > c^2 > d^2 \Rightarrow a > b > c > d$ (больше 0) следуя вышесказанному, т.к $c^2 - d^2 = e = a^2 - b^2$, то $c - d > a - b$.

В третьем варианте $b^2 = a^2 + 0 = a^2$; $c^2 = b^2 + 0 = b^2$, $d^2 = c^2 + 0 = c^2 \Rightarrow$ $a^2 = b^2 = c^2 = d^2$. Т.к. $a, b, c, d > 0$, то $a = b = c = d$

Пусть $a + b + c + d = K$. Приведем вторую арифм. прогрес. к общему знаменателю

$$\frac{1}{a+b+c}, \frac{1}{a+b+d}, \frac{1}{a+c+d}, \frac{1}{b+c+d}$$

$$\frac{1}{K-d}, \frac{1}{K-c}, \frac{1}{K-b}, \frac{1}{K-a}$$

$(K-c)(K-b)(K-a)$, $(K-d)(K-b)(K-a)$,
$(K-d)(K-c)(K-a)$, $(K-d)(K-c)(K-b)$

Т.к. числит. и знаменатели больше нуля, то можно сказать, что числители образуют арифм. прогрессию с одинаковой по знаку разностью.

Найдем разницу между 1 и 2 членом, предварительно раскрыв скобки

$k^3-k^2(a+b+d)+k(ab+ad+bd)-abd-(k^3-k^2(a+b+c)+k(ab+ac+bc)-abc=$

$=k^2(a+b+c-a-b-d)+k(ab+ad+bd-ab-ac-bc)+abc-abd=$

$=k^2(c-d)+k(ad+bd-ac-bc)+ab(c-d)=$

$=k^2(c-d)+k(a+b)(c-d)+ab(c-d)=$

$=(c-d)(k^2+k(a+b)+ab)=n_{12}$

Аналогично для 3 и 4 члена

$(a-b)(k^2+k(c+d)+cd)=n_{34}$

1) если $e>0$, $a<b<c<d$, $b-a>d-c$, то

$|c-d|>|a-b|$ неверно
 см.

$|a+b|>|c+d|$ неверно

$ab>cd \Rightarrow n_{12}>n_{34}$ но это верно

2) если $e<0$, $a>b>c>d$, $c-d>a-b$, то

$|c-d|<|a-b|$

$a+b<c+d$

$ab<cd \Rightarrow n_{12}<n_{34}$

Но n_{12} и n_{34} разница между сосед. членами ариф. прогр $\Rightarrow n_{12}=n_{34} \Rightarrow \cancel{e<0}$, $\cancel{e>0} \Rightarrow$ $e=0$

+

(4) $m\in[1;2021)$. Если $m=2022$, то $\sqrt{n+\sqrt{k}}=1$

$\Rightarrow n+\sqrt{k}=1 \Rightarrow$ при $\min n=1$, $\sqrt{k}=0$, не нату.

При $m=1$ $\sqrt{n+\sqrt{k}}=2022 \Rightarrow n+\sqrt{k}=2022^2 \Rightarrow$

$n\in[1;2022^2-1]^{\vee}$ - всего 2022^2-1 вар.

k - вычисляется однозн. из m и n

Аналог. для $m=2$ $n \in [1; 2021^2-1]$. $= 2021^2-1$ вар

Для $m=2021$ $n \in [1; 2^2-1] = \cancel{2 \text{ вар}}\ 2^2-1$ вар

Значит общее число вар:
сумма членов последовательности
$(2^2-1;\ 3^2-1;\ 4^2-1;\ \dots;\ 2022^2-1)$ (2021 член)

$= 2^2+3^2+\dots+2022^2-2021$

Ответ: $2^2+3^2+\dots+2022^2-2021$

(5) Выберем 8 самых больших чисел (от 57 до 64). Если Петя расставит их на одну диагональ, то макс. ~~число~~ сумма, которую может собрать Вася = 171 (см. черновик)

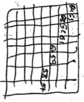
оценка не верна

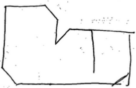
Бланк ответов

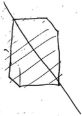
$$\frac{a}{2021} \quad a=1 \quad \frac{+1--1}{0} \quad \frac{\begin{matrix}1001\\515\\505\end{matrix}}{2021} \quad \frac{\begin{matrix}1001\\515\\505\end{matrix}}{2021}$$

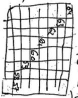
$a=2$

$$\frac{\begin{matrix}+2--2\\9\end{matrix}}{2021}$$

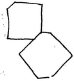


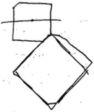






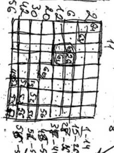
$57+56+58=171$





Задача 5

a^2, b^2, c^2, d^2 $\quad \frac{1}{a+b+c}, \frac{1}{a+b+d}, \frac{1}{a+c+d}, \frac{1}{b+c+d}$



$a^2 = b^2 - e$

$a = \sqrt{b^2 - e}$

$a = \sqrt{c^2 - 2e}$

$d - c$ $\quad b - a$

$d - \sqrt{d^2 - e}$ $\quad b - \sqrt{b^2 - e}$

$d - \sqrt{d^2-e} - b + \sqrt{b^2-e}$

$2e + \sqrt{b^2-e} - \sqrt{d^2-e}$

$$\frac{(a+b+c)-(a+b+d)}{(a+b+c)(a+b+d)} = \frac{c-d}{(a+b+c)(a+b+d)}$$

$$\frac{(a+b+d)-(a+c+d)}{(a+c+d)(a+b+d)} = \frac{b-c}{(a+c+d)(a+b+d)}$$

$\frac{1}{a+b+c}, \frac{1}{a+b+d}$

$$\frac{1}{a+b+d} - \frac{1}{a+b+c} = \frac{1}{a+c+d} - \frac{1}{a+b+d} = \frac{1}{b+c+d} - \frac{1}{a+c+d}$$

$$\frac{(a+c+d)-(b+c+d)}{(b+c+d)(a+c+d)} = \frac{a-b}{(b+c+d)(a+c+d)}$$

$k^3-k^2(a+b+c)+k(ab+ac+bc)-abc$

$k^3-k^2(a+b+d)+k(ab+ad+bd)-abd = k^3-k^2(a+b+c)+k(ab+ac+bc)-abc + e$

$-k^2(a+b+d)+k^2(a+b+c)+k(ab+ad+bd)-k(ab+ac+bc)-abd+abc=e$

$k^2(a+b+c-a-b-d)+k(\cancel{ab}+ad+bd-\cancel{ab}-ac-bc)+abc-abd=e$

$k^2(c-d)+k(ad+bd-ac-bc)+ab(c-d)=e$

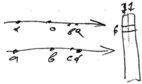
$k^2(c-d)+k(d(a+b)-c(a+b))+ab(c-d)=e$

$k^2(c-d)+k(a+b)(c-d)+ab(c-d)=e$

$(c-d)(k^2+k(a+b)+ab)=e$

$\boxed{135}$

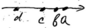
$57+58=115$



$7+7+6$

$=20$

$\underbrace{(c-d)(k^2+k(a+b)+ab)}_{m_1} = \underbrace{(b-c)(k^2+k(a+d)+ad)}_{m_2} = \underbrace{(a-b)(k^2+k(c+d)+cd)}_{m_3}$

1) 

$|c-d|>|a-b|$

$|c+d|<|a+b|$

$cd < ab$

$m_1>m_3$

2) 

$|c-d|<|a-b|$

$a+b<c+d$

$ab<cd$

$m_1<m_3$

$[64;57]$

$57+58 = 115$

$m+\sqrt{n+\sqrt{k}}=2023$

$m=1 \Rightarrow \sqrt{n+\sqrt{k}}=2022$

$n+\sqrt{k}=2022^2$

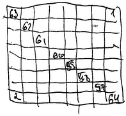
$n\in[1;2022^2-1]$

2022^2-1

$m=2 \Rightarrow \sqrt{n+\sqrt{k}}=2021$

$n+\sqrt{k}=2021^2$

$n\in[1;2021^2-1]$



$m=3 \Rightarrow n+\sqrt{k}=2020^2$

$n\in[1;2020^2-1]$

$=2020^2-1$

$m=2020 \Rightarrow n+\sqrt{k}=3^2$

$n\in[1;8] = 3^2-1$

$130 : 3 = 43$
-12
10

$m=2021 \Rightarrow n+\sqrt{k}=2^2$

$n\in[1;3] = 2^2-1$

~~m = 2022 =>~~

$(2^2-1;\ 3^2-1;\ 4^2-1;\ \dots\ 2022^2-1)$

$(2^2+3^2+4^2+\dots+2022^2)-2021$

$\frac{(1+64)\cdot 64}{2}$ 4 ~~65·4~~ 135 189

$64+63+2 = 129$

$130 \Rightarrow 44$