ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802803018749

Титульный лист

Направление ☐ информатика ☐ история ☑ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☑ 11

Фамилия МАРАКУЛИН

Имя АНДРЕЙ

Отчество АНДРЕЕВИЧ

Дата рождения 06 05 2005

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Аудитория 611

Телефон 89002156950

Дата 22 02 2023 **Подпись**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802803018749

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ информатика ☐ история ☑ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☑ 11

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

Протокол проверки

Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	14	20	0	8	0					
Балл члена жюри №2	14	20	0	8	0					

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Балл члена жюри №1										
Балл члена жюри №2										

Итоговый балл 42

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

2021 - не палиндром => студент не получит 1 задачу. №1.

Докажем, что нельзя разложить 2021 на сумму двух палиндромов. Для этого переберём все такие палиндромы (тже их разницу с 2021).

Наиб. палиндром < 2021 – 2002 (чтобы доказать это достаточно рассмотреть [illegible] 18 чисел от 2003 до 2020, либо сказать, что палиндром в сотнях и тысячах содержит 0 и 2 соответственно => т.к это палиндром, то десятки содержат то же число, что и сотни, а единицы, то же, что и в тысячах. Такое число – 2002, также это единственное число с 20 в начале по тем же соображениям)

2021 = 2002+19 - не подходит. √

Далее ищут такие палиндромы.

2021 = 1991 + 30 = 1881 + 140 = 1771 + 250 = 1661 + 360 = 1551 + 470 = = 1441 + 580 = 1331 + 690 = 1221 + 800 = 1111 + 910 = 1001 + 1020

ни одно не подходит

Это палиндромы с числами 19, 18 .. 10 в начале. Они единственны по доказательству выше. √

Далее ищут трёхзначные палиндромы.

Палиндромы с числами 9, 8 .. 2 в начале не подходят, т.к если вычесть любое такое число из 2021 на конце будет цифра > 1 => => ~~[illegible]~~ если эта разница - палиндром, то сумма исходного палиндрома и разницы > 2021, получаем противоречие => все такие палиндромы не подходят. не обосновано

Остаются палиндромы с 1 в начале:

2021 = 191 + 1830 = 181 + 1840 = 171 + 1850 = 161 + 1860 = 151 + 1870 = 141 + 1880 = = 131 + 1890 = 121 + 1900 = 111 + 1910 = 101 + 1920

ни один не подходит

Далее ищут двухзначные палиндромы

2021 = 99 + 1922 = 88 + 1933 = 77 + 1944 = 66 + 1955 = 55 + 1966 = 44 + 1977 = = 33 + 1988 = 22 + 1999 = 11 + 2010

ни один не подходит

Мы перебрали все палиндромы и их разность с 2021. Ни одна разность не является палиндромом => 2021 не раскладывается на сумму двух палиндромов. Зато раскладывается на сумму трёх палиндромов: 2021 = 1111 + 910 = 1111 + 888 + 22. ПРИМЕР

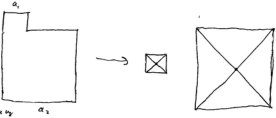
+

Ответ: 3 задачи.

№2.

~~Существует.~~

Такой многоугольник существует!



фигура $ч_2$

(это маленького квадрата и большого квадрата, $\frac{a_1}{a_2} < \frac{1}{2}$)

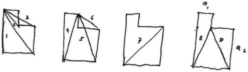
Квадрат имеет центр симметрии (очевидно)

Заметим, что если у фигуры есть центральная симметрия, то её можно разрезать по линии, проходящей через две вершины, на две равные фигуры.

o - центр симметрии

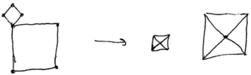
$Ф_1 = Ф_2$

Докажем, что это свойство не выполняется для данного многоугольника. Соединим все вершины и рассмотрим получившиеся пары фигур (стороны можно не рассматривать).



Как можно заметить, ни одна линия не делит многоугольник на две равные фигуры (линия 8 могла бы, но $a_1 \neq a_2$ => данные прямоугольные трапеции не равны)

Есть ещё один вариант многоугольника и доказательства (но я не уверен можно ли данную фигуру назвать многоугольником, но на всякий случай напишу доказательство):



Д-во, что у исходного многоугольника нет центра симметрии:

При центральной симметрии кол-во вершин всегда $2n$, если центр симметрии не в вершине (т.к. каждая вершина переходит в другую и только центр симметрии в себя)
У нашего многоугольника 7 вершин => если центр симметрии существует => он находится в вершине. Рассмотрим все вершины и поймём, что они не являются центрами симметрии => у данной фигуры нет центра симметрии

№3.

Из арифметической прогрессии можно составить следующую систему уравнений (d_{ap} - разность арифметической прогрессии):

$$\begin{cases} a^2 + d_{ap} = b^2 \\ a^2 + 2d_{ap} = c^2 \\ a^2 + 3d_{ap} = d^2 \\ \dfrac{1}{a+c+d} = \dfrac{\frac{1}{a+b+d} + \frac{1}{b+c+d}}{2} \\ \dfrac{1}{a+b+d} = \dfrac{\frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{a+c+d}}{2} \end{cases}$$

Как мы видим, это система из 5 уравнений с 5 неизвестными => можно найти каждое число и доказать, что $a=b=c=d$.

Каким образом?

—

№4.

Заметим, что $\sqrt{k}$ должно быть натуральным => => k - квадрат какого-то числа. Заметим, что $\sqrt{n+\sqrt{k}}$ должно обладать такими же свойствами.

Если мы знаем n и k, то m определяется однозначно.
Если мы знаем $n+\sqrt{k}$ и n, то k определяется однозначно

$\sqrt{n+\sqrt{k}}$ может принимать значения от 2022 до 2 (т.к минимальное $m=1$ => $\sqrt{n+\sqrt{k}}=2022$, а минимальные ~~...~~ n и $k=1$ => $\sqrt{n+\sqrt{k}}=\sqrt{2}>1$, но т.к $\sqrt{n+\sqrt{k}}$ - натуральное => $\sqrt{n+\sqrt{k}}=2$)

Переберём все возможные значения $\sqrt{n+\sqrt{k}}$ и для них переберём все n:

$\sqrt{n+\sqrt{k}}$	n
2022	$2022^2-1 \dots 1$
2021	$2021^2-1 \dots 1$
...	...
2	$2^2-1 \dots 1$ √

т.к мы знаем ~~все~~ $\sqrt{n+\sqrt{k}}$ и n => однозначно определяется k => => однозначно определяется m => кол-во троек n, m, k ровно:

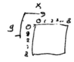
$$\sum_{i=2}^{n=2022}\left(i^2-1+1\right)=\sum_{i=2}^{n=2022}\left(i^2\right)$$

∓

Формула неверная

№5.

В какой бы клетке не начал бы Вася, он может попасть в любую клетку после двух ходов ладьёй (иными словами 3 клетка может быть любой). Докажем это:



Пусть первая клетка имеет координаты $(x_1; y_1)$, а хотим мы попасть в $(x_2; y_2)$.

Разница по x равна $(x_2 - x_1) = x_0$

Разница по y равна $(y_2 - y_1) = y_0$

т.к. ладья перемещается на любое кол-во клеток по горизонтали и вертикали =>

=> после двух ходов ладья может оказаться на клетке с координатами $(x_1 + x_0; y_1 + y_0) = (x_2; y_2)$ ч.т.д. =>

=> ладья из клетки с числом 64 может переместиться на число 63. В худшем случае первый ход ладья может сделать на клетки с 1 и 2 (когда она идёт в клетку с 63) =>

=> максимальная сумма, которую получит Вася равна:

$64 + 63 + 2 = 129$

Ответ. 129. Не доказано, что нельзя получить больше