ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802209358268

Титульный лист

Направление ☐ информатика ☐ история ■ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ■ 11

Фамилия КЛОПОВ

Имя ГРИГОРИЙ

Отчество СЕРГЕЕВИЧ

Дата рождения 07 08 2005

Город участия ЧЕЛЯБИНСК

Аудитория 259

Телефон 89634680280

Дата 27 02 2023 **Подпись** Гриш

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802209358268

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ информатика ☐ история ■ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ■ 11

Город участия ЧЕЛЯБИНСК

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

Протокол проверки

Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	20	20	0	–					
Балл члена жюри №2	20	20	20	0	–					

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Балл члена жюри №1										
Балл члена жюри №2										

Итоговый балл 60

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

№3

Запишем данные в условии арифметические прогрессии, обозначив разности как x и y:

$$\begin{cases} a^2+y=b^2 \\ b^2+y=c^2 \\ c^2+y=d^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{1}{a+b+c}+x=\frac{1}{a+b+d} \\ \frac{1}{a+b+d}+x=\frac{1}{a+c+d} \\ \frac{1}{a+c+d}+x=\frac{1}{b+c+d} \end{cases}$$

из св-в арифметической прогрессии, а также указанных равенств следует, что ~~$a^2-b^2=b^2-c^2$~~

$$(2)\quad b^2-a^2=c^2-b^2=d^2-c^2$$

$$(1)\quad \frac{1}{a+b+d}-\frac{1}{a+b+c}=\frac{1}{a+c+d}-\frac{1}{a+b+d}=\frac{1}{b+c+d}-\frac{1}{a+c+d}$$

для удобства обозначим $a+b+c=t$, тогда (1) принимает вид
$a+b+d=l$
$a+c+d=m$
$b+c+d=k$
($t, l, m, k>0$, т.к. a, b, c, d — положительные)

$$\frac{a+b+c-a-b-d}{tl}=\frac{a+b+d-a-c-d}{ml}=\frac{a+c+d-b-c-d}{km}$$

$$\frac{c-d}{tl}=\frac{b-c}{ml}=\frac{a-b}{mk} \Rightarrow, \text{ т.к. } t, l, m, k>0$$

$$\begin{cases} (c-d)m=(b-c)t \\ (b-c)k=(a-b)l \end{cases}$$

~~$bac+c^2+dc-ab$~~

$$\begin{cases} (c-d)(a+c+d)=(b-c)(a+b+c) \\ (b-c)(b+c+d)=(a-b)(a+b+d) \end{cases}$$

↓

№3 (продолжение)

$$\begin{cases} ac + c^2 + dc - ad - dc - d^2 = ab + b^2 + bc - ac - bc - c^2 \\ b^2 + bc + bd - bc - c^2 - cd = a^2 + ab + ad - ab - b^2 - bd \end{cases}$$

$$\begin{cases} (c^2-b^2)+2ac = (d^2-c^2)+ab+ad \\ (b^2-a^2)+2bd = (c^2-b^2)+ad+cd \end{cases}$$

из (2) следует, что $\begin{cases} (c^2-b^2)=(d^2-c^2) \\ (b^2-a^2)=(c^2-b^2) \end{cases}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 2ac = ab+ad \\ 2bd = ad+cd \end{cases}$, но т.к. $d>0$ и $a>0$ $\begin{cases} 2c = b+d \\ 2b = a+c \end{cases}$ ✓

Замена: $c-b = t_1 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = b-a \\ t_1 = d-c \\ t_1 = c-b \end{cases}$

$\begin{cases} a+c = 2b \\ b+d = 2c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b-a = c-b \\ d-c = c-b \end{cases}$ (*)

из (2) $\Rightarrow \begin{cases} (c^2-b^2)=(d^2-c^2) \\ (b^2-a^2)=(c^2-b^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (c-b)(c+b)=(d-c)(d+c) \\ (b-a)(b+a)=(c-b)(c+b) \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} t_1(c+b) = t_1(d+c) \\ t_1(b+a) = t_1(b+c) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1(b-d)=0 \\ t_1(a-c)=0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t_1=0 \\ b=d \end{cases} \\ \begin{cases} t_1=0 \\ a=c \end{cases} \end{array} \right.$ (**)

при $t_1=0$, $b=a$, $d=c$, $c=b \Rightarrow a=b=c=d$

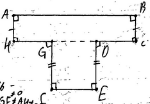
Пусть $t_1 \neq 0$, тогда (**) $\Rightarrow \begin{cases} b=d \\ a=c \end{cases}$ (*) „превратится" в при подстановке $\begin{cases} b-a = a-b \\ d-c = c-d \end{cases}$, т.е.

$\begin{cases} a=b \\ c=d \end{cases} \Rightarrow b=a=b=c=d \Rightarrow t_1 = b-a = 0 \Rightarrow t_1 \neq 0$ — противоречие, а значит $t_1 = 0$ всегда

Значит $a=b=c=d$ при любых условиях ч.т.д.

№2

Да, существует, например:



Мн-ник ABCDEFGH не имеет центра симметрии. ABCH – прямоугольник, как и GDEF, причем $GH \neq DC$ ($\neq 0$, $\neq 0$) и $GF \neq AH$ ($\neq 0$) ($\angle HAB = \angle ABC = \angle BCH = \angle BAH = \angle HGF = \angle CDE = \angle GFE = \angle DEF = 90°$; $AH = BC$, $GF = DE$)

Линия разреза показана пунктиром, таким образом ABCDEFGH разделится на 2 выпуклых мн-ка – прямоугольники ABCH и GDEF, у которых существует центр симметрии – точка пересечения диагоналей. В ABCDEFGH не найдётся ни одной точки, соответствующей определению центра симметрии, т.к. фигура несимметричная ($GH \neq DC$ и $GF \neq AH$), ~~[illegible]~~ оси симметрии тоже нет.

№1

Наименьшее кол-во задач, которое может получить студент – 3.

Например $2021 = \underline{1771 + 151 + 99}$ (пример) $\begin{pmatrix} a_1 = 1771 \\ a_2 = 151 \\ \cancel{a_3 = 99} \\ a_3 = 99 \end{pmatrix}$. Очевидно, что из одного числа получить 2021 не получится, т.к. 2021 ~~палиндром~~ не палиндром. ✓

Тогда попробуем получить 2021 из двух палиндромов. Один из них должен быть четырёхзначным, т.к. 2 самых больших трёхзначных палиндрома в сумме < 2021 ($999 \cdot 2 = 1998 < 2021$). ✓

Рассмотрим все четырёхзначные палиндромы и их разность при вычитании из 2021. Если разность – палиндром, значит два палиндрома найдутся (разность и четырёхзначное число):

№2 (продолжение)

Палиндром	Разность
2002	19
1991	30
1881	140
1771	250
1661	360
1551	470
1441	580
1331	690
1221	800
1111	910
1001	1020

Ни одна из приведённых пар не является парой палиндромов, а значит на 2 палиндрома 2021 разложить нельзя. На 3 палиндрома уже был приведён пример ($2021 = 1771 + 151 + 99$), а значит минимальное кол-во задач, которое получит студент — 3.

+

№4

$m + \sqrt{n + \sqrt{k}} = 2023$

Т.к. m, n, k — натуральные $\Rightarrow \sqrt{k}$ и $\sqrt{n+\sqrt{k}}$ также натуральные (т.к. $2023 - m \in \mathbb{Z}$). Значит k — квадрат какого-то числа, а n дополняет $\sqrt{k}$ до какого-либо квадрата, $m = 2023 - \sqrt{n+\sqrt{k}}$. Рассмотрим все возможные варианты n и k, таких, что $\sqrt{n+\sqrt{k}} \leq 2022$ (т.к. $m \in \mathbb{N} \Rightarrow m \geq 1 \Rightarrow 2023 - \sqrt{n+\sqrt{k}} \geq 1 \Rightarrow \sqrt{n+\sqrt{k}} \leq 2022$). Будем считать, что m выражается однозначно при заданных n и k при $\sqrt{n+\sqrt{k}} \leq 2022$ и $\sqrt{n+\sqrt{k}} \in \mathbb{N}$ (т.к. $n, k \in \mathbb{N}$, $\Rightarrow n \geq 1, k \geq 1$), а значит в переборе m участвовать не будет ($m = 2023 - \sqrt{n+\sqrt{k}}$).

Рассмотрим k и n:

$k = a^2$, $a \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{n+\sqrt{k}} = \sqrt{n+a} \leq 2022$

$a \in \mathbb{N}$, ~~$a \in [1; 44]$, т.к. $k = 45^2$~~ $n + a \leq 2022^2$ (т.к. $n + a \geq 2$) $n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{N}$

Все возможные значения n — $\mathbb{N}$ числа от 1 до $2022^2 - 1$, т.е. $n \in \mathbb{N}$, $n \in [1; 2022^2 - 1]$, а a в свою очередь будет $a \in \mathbb{N}$, ~~$a \in [1; 2022^2 - 1]$~~ ~~$[2022^2 - n]$~~ $a \in [1; 2022^2 - n]$.

№4 (продолжение)

~~Таким образом число всех возможных вариантов n и $a(N)$~~

~~Др.~~

Введём $K=a^2 \Rightarrow \sqrt{K}=a$, тогда $\sqrt{n+\sqrt{k}}=\sqrt{n+a}\leq 2022$. Заметим, что

$a\in N$ т.к. $a\geq 1$

$a\geq 1$

K однозначно определяется при заданном a (т.к. $K\in N \Rightarrow K\geq 1$), а потому число троек n, ~~m~~ и k совпадёт с числом троек n, m и a. ~~$n+a=$~~ $n+a=t^2$, $t\in N$, $t\in[2;2022]$ (т.к. $\sqrt{t^2}=\sqrt{n+a}=t\leq 2022$, $a\; n+a\geq 2 \Rightarrow t^2\geq 2 \Rightarrow t^2\neq 1$).

Т.е. $n+a=2^2$ $\Rightarrow$ a однозначно определится для каждого р-ва при заданном n, ~~либо такого варианта не существует~~

$n+a=3^2$

$n+a=4^2$ ~~вова (при если n~~, если n не будет

$n+a=5^2$

$n+a=2022^2$ больше квадрата, в таком случае этот вариант

при таком р-ве считать не будем. Тогда число всех возможных вариантов при $n=1$ $(2^2-n)+(3^2-n)+(4^2-n)+\ldots+(2022^2-n)$

что это за подсчет

по уже при $n=4$ $(3^2-n)+(4^2-n)+\ldots+(2022^2-n)$. Таким образом $n\in[1;2022^2-1]$, т.к. $a\geq 1$. ~~Воспользуемся формулой суммы геом. прогрессии: $S_n=\frac{b(q^n-1)}{q-1}$~~ По формуле суммы квадратов можно узнать сумму квадратов, а затем вычесть число n, удовлетворяющую числу квадратов.