ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802568358028

Титульный лист

Направление	☐ информатика	☐ история	☒ математика
	☐ обществознание	☐ русский язык	☐ физика
	☐ химия		

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Фамилия ХАФИЗОВ

Имя АРТЁМ

Отчество РУСТАМОВИЧ

Дата рождения 09 08 2005

Город участия ЧЕЛЯБИНСК

Аудитория 259

Телефон 89525040214

Дата 27 02 2023 **Подпись**

Пример заполнения АБВГДЕЖЗИЙКЛМНОПРСТУФ
ХЦЧШЩЪЫЬЭЮЯ1234567890

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802568358028

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Город участия ЧЕЛЯБИНСК

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	20	0	20	–					
Балл члена жюри №2	20	20	0	20	–					

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Балл члена жюри №1										
Балл члена жюри №2										

Итоговый балл 60

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

№1

Предположим, возможно создать верное рав-во с 2мя слагаемыми, тогда:

$a_1 + a_2 = 2021$

Рассмотрим возможные числа a_1 и a_2:

1.) если $a_1 \geq 1000$ и $a_2 \geq 1000$ $\Rightarrow$ пусть $a_1 = \overline{abba}$; $a_2 = \overline{cddc}$

$\Rightarrow \overline{abba} + \overline{cddc} = 2021 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a+c=1 \\ a+c=11 \end{array}\right.$ - исходя из последнего разряда (сумма 2х цифр меньше 21).

но т.к. a и $c > 0$ (иначе числа не четырехзначные)

$\Rightarrow a+c=1$ - невозможно $\Rightarrow a+c=11 \Rightarrow$

$\overline{abba} + \overline{cddc} = 1000(a+c) + 100(b+d) + 10(b+d) + a+c =$

$= 1001(a+c) + 110(b+d) \Rightarrow 1001(a+c) = 1001 \cdot 11 = 11011 \Rightarrow$

$11011 + 110(b+d) \geq 11011 > 2021$ (т.к. $b \geq 0$, $d \geq 0$) $\Rightarrow$ хотя бы одно из чисел меньше 1000

2.) если $a_1 < 1000$ и $a_2 < 1000 \Rightarrow \begin{cases} a_1 \leq 999 \\ a_2 \leq 999 \end{cases} \Rightarrow a_1 + a_2 \leq 1998 < 2021$

$\Rightarrow$ хотя бы одно из чисел ≥ 1000

3.) не умаляя общности пусть $a_1 \geq 1000$, $a_2 < 1000$, тогда т.к. $a_2 > 10$ (по усл) $\Rightarrow a_2$ или трехзначное или двузначное $\Rightarrow$

1. пусть a_2 - двузнач. $\Rightarrow a_2 \leq 99 \Rightarrow a_1 + a_2 = 2021 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1 = 2021 - a_2 \Rightarrow a_1 \geq 1922 \Rightarrow$ рассмотрим все палиндромы меньше 2021 и больше 1922:

① ~~$a_1 1991$~~ $a_1 = 1991 \Rightarrow a_2 = 30$

30 - не палиндром

② $a_1 = 2002 \Rightarrow a_2 = 19$

19 - не палиндром

из ① и ② следует, что a_2 не может быть двузначным, т.к. других вариантов нет и ни один вариант не подходит

2. пусть a_2 - трехзначное $\Rightarrow$ рассмотрим все возможные a_1:

$a_2 \geq 101 \Rightarrow a_1 = 2021 - a_2 \Rightarrow a_1 \leq 1920 \Rightarrow$ будем вычислять a_2 исходя из a_1:

a_1	a_2
1881	140
1771	250
1661	360
1551	470

a_1	a_2
1441	580
1331	690
1221	800
1111	910
1001	1020

Продолжение $\Rightarrow$

~~Мож~~ Можно убедиться, что a_2 или не палиндром, или не трехзначное число в любом возможном случае, значит a_2 не может быть трехзначным, а т.к. ~~одно~~ a_2 и не однозначное, и не четырехзначное, и не двузначное (причем $a_2 < 10000$, иначе $a_1 + a_2 > 2021$), значит не существует таких двух палиндромов a_1 и a_2, чтобы $a_1 + a_2 = 2021$ было верным. ОЦЕНКА

Если слагаемое одно, то $a_1 = 2021$, но 2021 – не палиндром $\Rightarrow$ слагаемое не одно

Значит, слагаемых минимум три:

Приведем пример: ПРИМЕР

$a_1 + a_2 + a_3 = 2021$ $\quad a_1 = 1771 \quad a_2 = 99 \quad a_3 = 151$

$a_1; a_2; a_3$ – палиндромы, $a_1 > a_3 > a_2 > 10$; равенство выполняется, значит такой пример подходит.

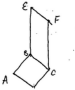
Значит, минимальное кол-во слагаемых равно трём (~~как~~ т.к. не равно одному и двум, а три – следующее наименьшее натуральное число)

Ответ: студент получит минимум три задачи

+

№2

Существует, приведем пример: построим квадрат, а затем на его стороне параллелограм, со второй стороной, много большей стороны квадрата: Искомая фигура – многоуг-к



ABEFCD: его можно разбить на квадрат ABCD, в котором центр симметрии – пересечение диагоналей, и на пар-м BEFC, ~~где~~ в котором центр симметрии – пересеч. диагоналей. ABCD и BEFC – выпуклые многоуг-ки. Докажем, что в данном случае ABEFCD не имеет центра симметрии:

Рассмотрим вершину E: если сущ-ет центр симм. (пусть это т. O), то E переходит при симм. отображении относительно O или в т. F, или в т. C, или в т. D, или в т. A, или в т. B. Рассмотрим все случаи:

1. E переходит в F $\Rightarrow$ $O \in EF$ $\Rightarrow$ т. B при симм. отобр. переходит в точку B', которая лежит вне многоуг-ка, ~~что не в~~ значит E не может переходить в F
(будем обозначать $E \xrightarrow{O} F$ фразу E переходит в F симм. отобр. относит-но т. O, и $E \not\xrightarrow{O} F$ фразу E не может переходить в т. F при симм. отобр. отн-но т. O)

Продолжение |->

2. $\mathcal{E} \xrightarrow{O} C$ $\Rightarrow$ т.к. $\mathcal{E}FCB$ – пар-м $\rightarrow$ $O = BF \cap \mathcal{E}C$ $\Rightarrow$ $B \xrightarrow{O} F$ $\Rightarrow$ $A \xrightarrow{O} D$, ~~т.~~т.к. иначе A или D совпадут с какими-либо другими точками, значит $O \in AD$, но $O = BF \cap \mathcal{E}C$ $\rightarrow$ противоречие $\Rightarrow$ $\mathcal{E} \not\xrightarrow{O} C$

3. $\mathcal{E} \xrightarrow{O} D$ $\Rightarrow$ $O \in \mathcal{E}D$ $\Rightarrow$ $C \xrightarrow{O} C'$, причем C' не принадлежит $AB\mathcal{E}FCD$, т.к. только т. A лежит по другую сторону $\mathcal{E}D$ от точки C, но $C \not\xrightarrow{O} A$, т.к. тогда $O = AC \cap BD$ ~~и~~ и $D \xrightarrow{O} B$, но $D \xrightarrow{O} \mathcal{E}$ $\rightarrow$ противоречие $\Rightarrow$ $\mathcal{E} \not\xrightarrow{O} D$

Заметим, что если $A \xrightarrow{O} A'$, то $A' \xrightarrow{O} A$

4. $\mathcal{E} \xrightarrow{O} A$ $\Rightarrow$ $O \in \mathcal{E}A$ $\Rightarrow$ $C \xrightarrow{O} C'$, но C' не лежит на $AB\mathcal{E}FCD$ (C' лежит по другую сторону от $\mathcal{E}A$ относительно C, а там нет точек, принадлежащих $AB\mathcal{E}FCD$) $\rightarrow$ противоречие $\Rightarrow$ $\mathcal{E} \not\xrightarrow{O} A$

~~в~~ (Противоречие заключается в таких случаях в том, что центр симм. перестает быть центром симм. по опр.)

5. $\mathcal{E} \xrightarrow{O} B$ $\Rightarrow$ $O \in \mathcal{E}B$ $\Rightarrow$ $C \xrightarrow{O} C'$, не принадлеж. $AB\mathcal{E}FCD$ по аналогичным причинам $\Rightarrow$ $\mathcal{E} \not\xrightarrow{O} B$

Как мы видим т. $\mathcal{E}$ не может переходить ни в одну другую точку многоугольника, а значит центра ~~симм.~~ симметрии не может существовать $\Rightarrow$ пример подходит

+

Ответ: Существует, пример приведён

№4

$m + \sqrt{n + \sqrt{k}} = 2023$; $m, n, k \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $n \geq 1$; $k \geq 1$ $\Rightarrow$ $n + \sqrt{k} \geq 2$

$\Rightarrow$ $\sqrt{n+\sqrt{k}} \geq \sqrt{2} > 1$ $\Rightarrow$ $\sqrt{n+\sqrt{k}}$ может принимать значение от 2 до 2022, если $\sqrt{n+\sqrt{k}} > 2022$ $\Rightarrow$ $m < 1$, но $m \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $m \geq 1$, значит $\sqrt{n+\sqrt{k}} \in [2; 2022]$, пусть $\sqrt{n+\sqrt{k}} = b$, тогда $m + b = 2023$, причем для каждого $b \in [2; 2022]$ m определяется однозначно: $m = 2023 - b$, т.е. для каждого варианта b существует ровно одно подходящее m. Значит, достаточно рассмотреть все возможные способы составления b от 2 до 2022.

Продолжение $\mapsto$

т.к. $b = \sqrt{n+\sqrt{k}} \Rightarrow n + \sqrt{k} = b^2 \Rightarrow$

$n + \sqrt{k} \in \{4, 9, 16, 25 \dots, 2022^2\}$ рассмотрим $n + \sqrt{k} = 4$

$k \geq 1$; $n \geq 1 \Rightarrow \sqrt{k} \geq 1 \Rightarrow$ пусть $\sqrt{k} = a \Rightarrow n + a = 4$

$\Rightarrow$ для каждого a существует ровно одно подходящее

n: $n = 4 - a$, причем т.к. $n \geq 1 \Rightarrow a \leq 3 \Rightarrow$

$a \in \{1; 2; 3\} \Rightarrow$ т.к. $a = \sqrt{k}$ $k = a^2$, причем т.к. $k \in N$,

то для каждого a существует ровно одно k, что $k = a^2$

$\Rightarrow k \in \{1; 4; 9\}$

выпишем возможные a для разных вариантов $n + \sqrt{k}$:

$n+\sqrt{k}$	a	
4	1 2 3	$c = 2^2 - 1$
9	1 2 3 4 5 6 7 8	$c = 3^2 - 1$
16	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15	$c = 4^2 - 1$

(c – кол-во вариантов a)

Кол-во возможных вариантов всегда на 1 меньше $n + \sqrt{k}$, т.к. ровно 1 вариант a не подходит: $a = n + \sqrt{k}$, тогда $n = 0$, но $n \geq 1$.

Т.к $n + \sqrt{k} \in \{4, 9, \dots, 2022^2\}$, то ~~а~~ кол-во разных вариантов a можно записать как сумму случаев $n + \sqrt{k}$:

$(2^2 - 1) + (3^2 - 1) + (4^2 - 1) + \dots + (2021^2 - 1) + (2022^2 - 1) = C$ (C – общее число вариантов a) $\Rightarrow C = 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + 2021^2 + 2022^2 - 1 \cdot 2021$

$C = \underbrace{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 2021^2 + 2022^2}_{\text{сумма квадратов первых 2022 нат-х чисел}} - 2022$ Сумму квадратов d первых натуральных чисел можно посчитать по общеизвестной формуле: $\frac{d(d+1)(2d+1)}{6}$

$\Rightarrow C = \frac{2022 \cdot 2023 \cdot 4045}{6} - 2022 = \cancel{337 \cdot (2023 \cdot 4045} = \cancel{337(2023 \cdot 4045}$

$= 337(2023 \cdot 4045 - 6) = 337 \cdot (8183035 - 6) = 337 \cdot 8183029 =$

$= 2757680773$ – способов выбрать a для разных b

А т.к. ~~для каждого вариан~~ каждому варианту a соответствует ровно один вариант k, ровно один вариант n (для ~~различных~~ одного b), значит одному варианту a соответствует одна комбинация n и k, значит общему числу выбора a для разных b соответствует общее число возможных комбинаций b, а т.к. каждой комбинации b соответствует ровно одно m, то общее число комбинаций b равно общему числу комбинаций m, n, k (т.е. троек) $\Rightarrow$

Ответ: 2757680773

+

Бланк ответов

№ 3

пусть первая прогрессия возрастает

$\Rightarrow a^2 ; a^2+n ; a^2+2n ; a^2+3n, \ n>0 \Rightarrow a<b<c<d$

$\Rightarrow \frac{1}{a+b+c} > \frac{1}{a+b+d} > \frac{1}{a+c+d} > \frac{1}{b+c+d}$ – убывает $\Rightarrow$

$\frac{1}{}$

Нет продвижений